

Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 9 - sistemas con parámetro parte 3 de 4

1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{cases} .$$

a) Discute según los valores del parámetro m .

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array} \right) \rightarrow \text{Resolvemos por Gauss} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1, F'_3 = F_3 - 2F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 2 & 3m+1 & 8-6m \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 + 2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array} \right)$$

Iguamos los coeficientes de la diagonal principal que dependen del parámetro: $m-3=0 \rightarrow m=3$

Realizamos una discusión de casos, en función el parámetro, para determinar el tipo de solución.

- Si $m=3 \rightarrow$ El sistema, tras aplicar Gauss, queda
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$
 En la tercera ecuación aparece el absurdo matemático $0=2$ – No hay solución \rightarrow Sistema Incompatible.
- Si $m \neq 3 \rightarrow$ Tras aplicar Gauss obtenemos tres ecuaciones de coeficientes no nulos y tres incógnitas, por lo que podemos despejar de manera única cada incógnita \rightarrow Sistema Compatible determinado

b) Para $m=-2$ estamos, según la discusión del apartado anterior, en solución única. El sistema, tras

aplicar Gauss, queda
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$
 De cada fila podemos resolver una incógnita.

Tercera fila $\rightarrow -5z=2 \rightarrow z=\frac{-2}{5}$

Segunda fila $\rightarrow -y=-9 \rightarrow y=9$

Primera fila $\rightarrow x+2y+z=3 \rightarrow x+18-\frac{2}{5}=3 \rightarrow x=\frac{-73}{5}$

2. Sabemos que el sistema siguiente tiene una única solución $\begin{cases} x + a y = 1 \\ x + a z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$ y que se cumple $a \neq 0$. Encuentra la solución del sistema en función del parámetro a .

Vamos a aplicar Gauss, sabiendo que el sistema es SCD según indica el enunciado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow F_2' = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right) \rightarrow F_3' = a F_3 + F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a^2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Resolvemos en cascada en cada fila (recordamos del enunciado que } a \neq 0 \text{)}$$

$$\text{De la tercera fila} \rightarrow 2a z = a^2 \rightarrow z = \frac{a}{2}$$

$$\text{De la segunda fila} \rightarrow -a y + a \cdot \frac{a}{2} = 0 \rightarrow y = \frac{a}{2}$$

$$\text{De la primera fila} \rightarrow x + a \frac{a}{2} = 1 \rightarrow x = 1 - \frac{a^2}{2} \rightarrow x = \frac{2 - a^2}{2}$$