Zlatý řez

# Zlatořezá tečna hyperboly

*Žán Pól Kastról*


7. března 2022

## Příklad

Je dána hyperbola, která má střed v počátku, hlavní osu v ose $x$, prochází bodem $Q = [1; 1]$ a její excentricita je $e = 1$. Urči obecné rovnice jejích tečen procházejících bodem $M = [0; 1]$.

**Řešba:**

a) Určíme nejprve rovnici hyperboly. Páč střed je v počátku a hlavní osa v ose $x$, rovnice bude mít tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vzhledem ke vztahu $a^2 = e^2 - b^2 = 1 - b^2$ dostáváme po dosazení bodu $M$

$$\frac{1}{1 - b^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

Odtud po úpravě vznikne kvadrátická rovnice pro $b^2$

$$b^4 + b^2 - 1 = 0$$

Pro $a^2$ vychází

$$b^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Záporný kořen $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\varphi \doteq -1,618$ nás nezajímá, páč $b^2$ je kladné. Vidíme však, že to je záporně vzatý *zlatý řez*. Kladný kořen je $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\varphi} \doteq 0,618$ je převrácená hodnota *zlatého řezu*. Připomeňmež, že pro *zlatý řez* platí vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 \qquad (1) \\ \varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad (2) \end{aligned}}$$

Dopočítáme $a^2 = 1 - b^2 = 1 - \dfrac{1}{\varphi} \doteq 0,382$ a máme hyperbolu:

$$\frac{x^2}{1 - \frac{1}{\varphi}} - \frac{y^2}{\frac{1}{\varphi}} = 1$$

A po úpravě dostáváme rovnici hyperboly:

$$\boxed{\frac{\varphi}{\varphi - 1} \cdot x^2 - \varphi \cdot y^2 = 1} \tag{3}$$

b) Nyní určíme *poláru*:

$$p : \frac{\varphi}{\varphi - 1} \cdot x_M \cdot x - \varphi \cdot y_M \cdot y = 1$$

kde $M = [x_M; y_M] = [0; 1]$, takže po dosazení dostáváme $-\varphi y = 1$, takže polára má rovnici

$$\boxed{p : y = -\frac{1}{\varphi}} \tag{4}$$

c) Nyní určíme průserčíky poláry s hyperbolou, což jsou současně dotykové body tečen. Dosadíme (4) do (3)

$$\frac{\varphi}{\varphi - 1} \cdot x^2 - \frac{1}{\varphi} = 1$$

Odtud s použitím vztahu (1) vyjádříme $x$:

$$\begin{aligned} \varphi^2 x^2 - (\varphi - 1) &= \varphi(\varphi - 1) \\ \varphi^2 x^2 &= (\varphi - 1) + \varphi^2 - \varphi \\ \varphi^2 x^2 &= \varphi - 1 + \varphi + 1 - \varphi \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{\varphi}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

Dotykáče jsou tedy

$$\boxed{T_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varphi}}; -\frac{1}{\varphi}\right] \qquad T_2 == \left[-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}; -\frac{1}{\varphi}\right]}$$

d) No a teď už jenom určíme ty tečny $MT_1$ a $MT_2$. Směráky jsou $(T_1 - M)$ a $(T_2 - M)$ a páč $M = [0; 1]$, mámeť $\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}; -\frac{1}{\varphi} - 1\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}; -\frac{1}{\varphi} - 1\right)$. Takže normálové vektory jsou $\left(\frac{1}{\varphi} + 1; \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\varphi} + 1; -\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$. Ale páč platí vztah (2), dostáváme normálové vektory

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\varphi; \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right) \text{ a } \overrightarrow{n_2} = \left(\varphi; -\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$$

Pročež tečnice budou mít rovnice:

$$\varphi \cdot x \pm \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cdot y + c = 0$$

A páč mají tečnice procházet bodem $M = [0; 1]$, dostáváme pro parametr $c$:

$$c = \mp\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

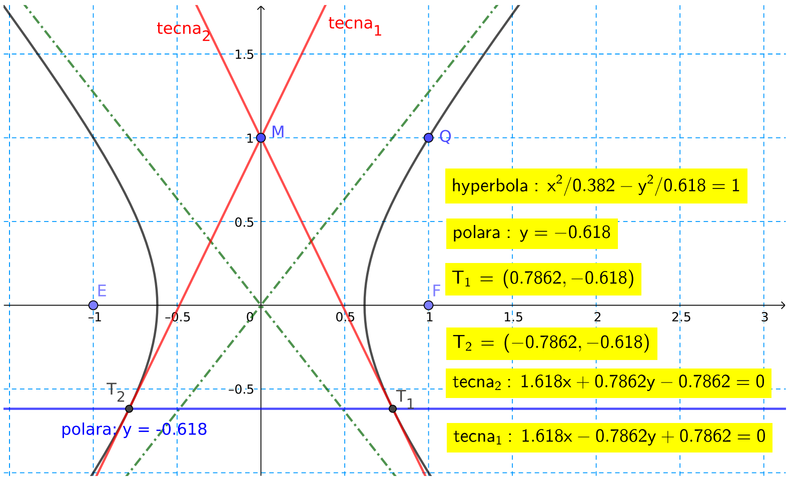
Takže tečny jsou

$$t_1 : \varphi \cdot x + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0$$

$$t_2 : \varphi \cdot x - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \cdot y + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0$$

respektíve

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &: \sqrt{\varphi^3} \cdot x + y - 1 = 0 \\ t_2 &: \sqrt{\varphi^3} \cdot x - y + 1 = 0 \end{aligned}}$$




Obr. 1:

https://ggbm.at/dN4XySqt

$\Delta$

Da Sista Les

$\infty$