

Modelos Funcionales sobre la relación de marchas

Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Facultad De Ciencias y Educación
Licenciatura en Matemáticas
Modelos Funcionales

Ana Sofía Velásquez Bogotá - 20192245011
Rafael Andrés Pulido Molano - 20182245077
Ricardo Alfonso Rincon Pinzon - 20171145067

14 de marzo de 2022

1. Introducción

En el presente documento denominado Modelos Funcionales sobre la relación de marchas, se busca responder ciertas situaciones y momentos en referencia a una investigación sobre la relación entre el número de vueltas de los pedales y el número de vueltas de la rueda de una bicicleta, a la par que se realiza una modelación que presenta el funcionamiento de relaciones de marchas, se responden ciertas preguntas que se relacionan con esta modelación y el mundo de las bicicletas.

2. Características de la bicicleta utilizada

La actividad N.^o1, consiste en investigar la relación entre el número de vueltas de los pedales y el número de vueltas de la rueda en una bicicleta, utilizando distintas marchas. Como ya se conoce, un dato importante sobre los platos y los piñones es el número de dientes que tienen. Por lo cual se utilizara una bicicleta que presente varios platos y piñones, para determinar los dientes presentes en cada plato y cada piñón de la misma.

2.1. Tamaño de las ruedas

La bicicleta utilizada cuenta con un tamaño de rueda de 22 pulgadas.

- **Los piñones de la bicicleta:** En este caso se tomó una bicicleta que se suele utilizar para movilizarse en las calles del municipio de Mosquera, pero que la mayoría de tiempo está sin utilización por cuestiones de que el dueño de la bicicleta comenzó a trabajar en una distancia muy lejana de su lugar de residencia para su utilización:

Número de dientes de los piñones de la bicicleta	
Piñón	Dientes del piñón
1 Piñón	14 dientes de piñón
2 Piñón	16 dientes de piñón
3 Piñón	18 dientes de piñón
4 Piñón	20 dientes de piñón
5 Piñón	22 dientes de piñón
6 Piñón	24 dientes de piñón

Cuadro 1: Número de dientes de los piñones en la bicicleta utilizada

- **Los platos de la bicicleta** Con los datos expuestos de los piñones de la bicicleta se procederá a registrar el reconocimiento de los datos de los platos de la bicicleta ordenados de menor a mayor, esto principalmente para facilitar el registro de marchas que más adelante se presentara:

Número de dientes de los piñones de la bicicleta	
Plato	Dientes del plato
1 Plato	28 dientes de plato
2 Plato	38 dientes de plato
3 Plato	48 dientes de plato

Cuadro 2: Número de dientes de los platos en la bicicleta utilizada

Con esta información se procede a registrar el desarrollo que se puede generar con la bicicleta.

3. Desarrollo de la bicicleta

El desarrollo es la distancia recorrida por cada pedalada que se da en la bicicleta, va a depender del plato y piñón que se está engranado. La dimensión de estos va a depender del número de dientes que tengan.

El número de vueltas que da la rueda va a depender del cociente entre el plato y el piñón que se esté usando.

$$\frac{\text{dientesdelplato}}{\text{dientesdelpiñon}} = \text{Relacióndemarchas} \quad (1)$$

A razón de esto, se logrará generar 3 tablas diferentes en donde se representa la relación de cada plato con cada piñón

3.1. Plato pequeño

A continuación se presenta la tabla que representa la relación de los piñones de la bicicleta y el plato más pequeño que es aquel que cuenta con 28 dientes.

PLATO PEQUEÑO	Plato	Piñón	Relación (Plato/Piñón)
	28	14	2.00
	28	16	1.75
	28	18	1.56
	28	20	1.40
	28	22	1.27
	28	24	1.17

Cuadro 3: Relación del plato pequeño y los piñones de la bicicleta expuesta

3.2. Plato mediano

A continuación se presenta la tabla que representa la relación de los piñones de la bicicleta y el plato mediano que es aquel que cuenta con 38 dientes.

PLATO MEDIANO	Plato	Piñón	Relación (Plato/Piñón)
	38	14	2.71
	38	16	2.38
	38	18	2.11
	38	20	1.90
	38	22	1.73
	38	24	1.58

Cuadro 4: Relación del plato mediano y los piñones de la bicicleta expuesta

3.3. Plato grande

A continuación se presenta la tabla que representa la relación de los piñones de la bicicleta y el plato grande que es aquel que cuenta con 48 dientes.

PLATO GRANDE	Plato	Piñón	Relación (Plato/Piñón)
	48	14	3.43
	48	16	3.00
	48	18	2.67
	48	20	2.40
	48	22	2.18
	48	24	2.00

Cuadro 5: Relación del plato grande y los piñones de la bicicleta expuesta

Con estos datos expuestos se procederá a responder las siguientes preguntas que hacen referencia al mundo de las bicicletas y la relación de marchas.

4. Preguntas

4.1. ¿La distancia recorrida es mayor con un plato grande o con un plato pequeño?. Bajo qué condiciones deja ser así

Para dar respuesta a esta pregunta se plantea en un primer momento sacar la distancia que recorre la bicicleta por una vuelta de biela en cada cambio posible. Para hallar esta distancia primero hallamos el perímetro de la rueda de la siguiente forma:

$$p = 2\pi r \quad (2)$$

La expresión del perímetro anterior también se puede escribir como:

$$p = d\pi \quad (3)$$

Siendo d el diámetro de la rueda, ya que si multiplicamos por 2 el radio será lo mismo que tener el diámetro de la rueda. Reemplazando el diámetro de la rueda de la bicicleta que es de 22 pulgadas se tendría que el perímetro de la rueda es:

$$p = d\pi \quad (4)$$

$$p = 22in(\pi) \quad (5)$$

$$p = 69,11in \quad (6)$$

Una vez obtenido el perímetro de la rueda se multiplicará este dato por cada relación de cada plato con cada piñón para saber lo que avanza la rueda en un pedalazo.

4.1.1. Avance de la bicicleta con el plato pequeño (28 dientes) y cada piñón

Para obtener lo que avanza la cicla por un pedalazo o vuelta de biela se realiza lo siguiente:

Sabemos el perímetro de la rueda que es $69,11in$ y, por otro lado, tenemos la relación $\frac{Plato}{Piñón}$. Si tomamos el plato pequeño (28 dientes) con el primer piñón (14 dientes) la expresión quedaría de la siguiente forma (dis = la distancia que recorre la bicicleta por cada pedalazo o vuelta de biela):

$$dis = (Perímetrode la rueda(in)) \left(\frac{Plato}{Piñón} \right) \quad (7)$$

$$dis = 69,11in(2,00) \quad (8)$$

$$dis = 138,22in \quad (9)$$

Es decir, cuando la bicicleta se encuentra en el plato pequeño y el piñón pequeño por cada vuelta de biela o pedalazo, la bicicleta avanzara $138,22in = 3,51m$

La siguiente tabla relaciona la distancia que recorre la bicicleta con el plato pequeño y cada uno de los piñones:

PLATO PEQUEÑO	Plato	Piñon	Relación $\frac{Plato}{Piñon}$	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(in)	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(m)
	28	14	2,00	138,22	3,51
	28	16	1,75	120,94	3,07
	28	18	1,56	107,50	2,73
	28	20	1,40	96,75	2,46
	28	22	1,27	87,96	2,23
	28	24	1,17	80,63	2,05

Cuadro 6: Relación de marchas en referencia al plato pequeño y recorrido por pedalazo.

Para conocer un poco más de como se presenta la relación de marchas y el recorrido que se realiza según el pedalazo, se propone utilizar el siguiente archivo de Excel: <https://onx.la/56875>.

En conclusión de la tabla anterior se puede evidenciar que con el plato más pequeño y a medida que se cambian los piñones, entre más grande sea el piñón menor será la relación, menor será el esfuerzo que debe realizar el ciclista para dar un pedalazo y también menor será la distancia que recorre en un pedalazo.

4.1.2. Avance de la bicicleta con el plato mediano (38 dientes) y cada piñón

Al igual que con el plato pequeño para poder hallar la distancia que recorre la bicicleta en un pedalazo o vuelta de biela se toma la expresión:

$dis = (Perímetro\ de\ la\ rueda\ (in)) \left(\frac{Plato}{Piñon}\right)$ pero ahora la relación será con base en el plato mediano y cada uno de los piñones. Se hará un ejemplo de como calcular esta distancia como en el caso anterior, dando por entendido que es mismo procedimiento para calcular las diferentes distancias y lo que varía será la relación $\frac{Plato}{Piñon}$.

$$dis = 69,11in(2,7143) \quad (10)$$

$$dis = 187,58in \quad (11)$$

Es decir, cuando la bicicleta se encuentra en el plato mediano y el piñón pequeño por cada vuelta de biela o pedalazo, la bicicleta avanzara $187,58in = 4,76m$

La siguiente tabla se relaciona la distancia que recorre la bicicleta con el plato mediano y cada uno de los piñones:

PLATO MEDIANO	Plato	Piñon	Relación $\frac{Plato}{Piñon}$	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(in)	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(m)
	38	14	2,71	187,58	4,76
	38	16	2,38	164,14	4,17
	38	18	2,11	145,90	3,71
	38	20	1,90	131,31	3,34
	38	22	1,73	119,37	3,03
	38	24	1,58	109,42	2,78

Cuadro 7: Relación de marchas en referencia al plato mediano y recorrido por pedalazo.

Para conocer un poco más de como se presenta la relación de marchas y el recorrido que se realiza según el pedalazo, se propone utilizar el siguiente archivo de Excel: <https://onx.la/56875>.

En conclusión de la tabla anterior se puede evidenciar que con el plato mediano y a medida que se cambian los piñones, entre más grande sea el piñón menor será la relación, menor será el esfuerzo que debe realizar el ciclista para dar un pedalazo y también menor será la distancia que recorre en un pedalazo.

4.1.3. Avance de la bicicleta con el plato grande (48 dientes) y cada piñón

Al igual que con el plato pequeño para poder hallar la distancia que recorre la bicicleta en un pedaleo o vuelta de biela se toma la expresión:

$dis = (Perímetro\ de\ la\ rueda(in)) \left(\frac{Plato}{Piñón}\right)$ pero ahora la relación será con base en el plato grande y cada uno de los piñones. Se hará un ejemplo de como calcular esta distancia como en los casos anteriores, dando por entendido que es mismo procedimiento para calcular las diferentes distancias y lo que varía será la relación $\frac{Plato}{Piñón}$.

$$dis = 69,11in(3,4286) \quad (12)$$

$$dis = 236,95in \quad (13)$$

Es decir, cuando la bicicleta se encuentra en el plato grande y el piñón pequeño por cada vuelta de biela o pedaleo, la bicicleta avanzara $236,95in = 6,02m$

La siguiente tabla relaciona la distancia que recorre la bicicleta con el plato grande y cada uno de los piñones:

PLATO MEDIANO	Plato	Piñon	Relación $\frac{Plato}{Piñón}$	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(in)	Avance por vuelta de biela (Pedalazo)(m)
	48	14	3,43	236,95	6,02
	48	16	3,00	207,33	5,27
	48	18	2,67	184,29	4,68
	48	20	2,40	165,86	4,21
	48	22	2,18	150,79	3,83
	48	24	2,00	138,22	3,51

Cuadro 8: Relación de marchas en referencia al plato grande y recorrido por pedaleo.

Para conocer un poco más de como se presenta la relación de marchas y el recorrido que se realiza según el pedaleo, se propone utilizar el siguiente archivo de Excel: <https://onx.la/56875>.

En conclusión de la tabla anterior se puede evidenciar que con el plato grande y a medida que se cambian los piñones, entre más grande sea el piñón menor será la relación, menor será el esfuerzo que debe realizar el ciclista para dar un pedaleo y también menor será la distancia que recorre en un pedaleo.

4.1.4. Conclusión final

En las diferentes combinaciones de plato y piñón se logra evidenciar que entre más grande sea el piñón menor será la relación, menor será el esfuerzo que debe realizar el ciclista para dar un pedaleo y también menor será la distancia que recorre en un pedaleo. Además, también se analiza el hecho que entre más grande sea el plato y menor sea el piñón la distancia que recorre la bicicleta será mayor. Si tomamos en la bicicleta el plato mayor y el plato menor con cada uno de sus cambios, se puede también evidenciar que con el plato grande(48 dientes) se avanzará más distancia que con el pequeño, a excepción de la combinación del plato grande(48 dientes) con el piñón más grande (24 dientes), ya que en este cambio la distancia que recorre es de $3,51m$ que sería la misma distancia si se tiene el cambio del plato pequeño (28 dientes) con el piñón más pequeño (14 dientes) que es también de $3,51m$.

4.2. ¿La distancia recorrida es mayor con un piñón grande o con un piñón pequeño?. Bajo qué condiciones es así

Con base a los datos obtenidos en el apartado anterior se encuentra que la distancia recorrida es mayor cuando se tiene el piñón más pequeño, esto deja de ser así cuando se cambia de plato, es decir, si dejamos el piñón más pequeño y cambiamos únicamente el plato la distancia recorrida será mayor a medida que el plato es mayor.

Por ejemplo, cuando se tiene el plato pequeño con el piñón más pequeño la distancia que se recorre es de $3,51m$, si se cambia al plato mediano y se mantiene el piñón más pequeño la distancia pasará de

3,51m a 4,76m y por último si se pasa al plato más grande la distancia que se recorre en un pedaleo para de 4,76m a 6,02m.

4.3. ¿Cuántas vueltas de la rueda de una bicicleta son necesarias para recorrer un kilómetro?

Teniendo en cuenta que el perímetro de la rueda es

$$p = d\pi \quad (14)$$

$$p = 22in(\pi) \quad (15)$$

$$p = 69,11in \quad (16)$$

$$p = 69,11in = 1,75394m \quad (17)$$

Ahora sí, sabemos que por cada vuelta de la rueda la bicicleta avanza 1,75m y además sabemos que $1km = 1000m$, para hallar el número de vueltas necesarias, tenemos que dividirlos $1000m$ en $1,75394m$.

$\frac{1000m}{1,75394m} = 570,144$, es decir, para recorrer 1 km se necesitarán realizar 570.144 vueltas de la rueda

4.4. ¿Cuáles combinaciones de plato y piñón generan mayor esfuerzo?, ¿por qué?

Las combinaciones que generan mayor esfuerzo son las combinaciones del plato grande con el piñón más pequeño, ya que esto se traduce en un mayor recorrido y a mayor recorrido por pedaleo se requiere un mayor esfuerzo.

4.5. ¿Cuáles combinaciones de plato y piñón generan menor esfuerzo?, ¿por qué?

Platos pequeños y piñones grandes nos darán como resultado desarrollos cortos, mientras que platos grandes y piñones pequeños nos darán desarrollos más largos. Un desarrollo largo hará que con cada pedaleo avancemos más metros, pero como contrapartida para mover la bicicleta también necesitaremos de más fuerza. Justamente lo contrario ocurre en los desarrollos cortos. En cada pedaleo avanzaremos menos metros, pero al mismo tiempo tendremos que hacer menos fuerza para desplazarnos.

4.6. ¿Qué cambió, (relación $\frac{\text{Plato}}{\text{Piñón}}$) elegirías para bajar y subir una montaña?

- En el caso particular de nuestra bicicleta para subir una montaña se elegirá el plato más pequeño con el piñón más grande, es decir, una relación de $\frac{28}{24}$ para un desarrollo más corto, pero con menos esfuerzo.
- En el caso particular de nuestra bicicleta para bajar una montaña se elegirá el plato más grande con el piñón más pequeño, es decir, una relación de $\frac{48}{14}$ para un desarrollo más largo, pero, ya que estamos en descenso no se puede dejar un esfuerzo menor, ya que si se deja este la cadencia de pedaleo sería mucha y se terminaría cansando demasiado al ciclista.

4.7. ¿La cantidad de vueltas que da la rueda delantera es la misma que da las vueltas que da el pedal?

No, la cantidad de vueltas que da el pedal es diferente a la cantidad de vueltas que da la rueda, esto depende del cambio en el que nos encontremos, ya que la relación $\frac{\text{Plato}}{\text{Piñón}}$ nos indicará la cantidad de vueltas que da la rueda por una vuelta del pedal.

Por ejemplo, si tenemos la relación $\frac{48}{20} = 2,4$ esto nos quiere decir que por cada vuelta de pedal la rueda dará 2.4 vueltas

5. Modelación de una situación de ciclismo

Se propone escoger una de las situaciones expuestas en la sesión anterior y generar las 4 formas de representación de la función de modelado resultante.

Las cuatro representaciones son:

- Tabular
- Sagital
- Analítica
- Gráfica

La situación escogida para realizar la modelación es la siguiente: ¿Cuántas vueltas de la rueda de una bicicleta son necesarias para recorrer un kilómetro?

En el siguiente enlace se encuentra la modelación realizada y escogida: <https://www.geogebra.org/m/rgdgszwq>

5.1. Representación Tabular

A continuación se presenta la representación tabular de la situación de las vueltas de la rueda de una bicicleta que son necesarias para recorrer un kilómetro.

Vueltas de la rueda	Distancia recorrida (m)
1	1.753
2	3.50
3	5.25
4	7.01
5	8.76
⋮	⋮
570.144	1000

Cuadro 9: Representación tabular de la situación de las vueltas de la rueda de una bicicleta que recorre en un kilómetro

5.2. Representación Sagital

A continuación se presenta la representación sagital de la situación de las vueltas de la rueda de una bicicleta que son necesarias para recorrer un kilómetro.

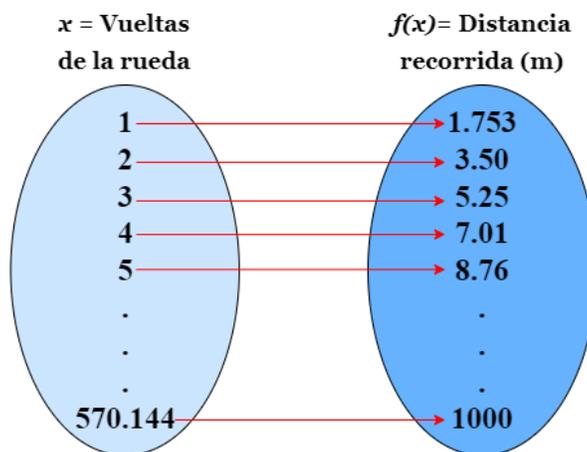


Figura 1: Representación sagital de la situación expuesta

5.3. Representación Analítica

A continuación se presenta la representación analítica de la situación de las vueltas de la rueda de una bicicleta que son necesarias para recorrer un kilómetro.

Dado que al realizar la gráfica del número de vueltas necesarias para recorrer un kilómetro se encuentra que es una gráfica de una función lineal, se puede utilizar la siguiente expresión para hallar la expresión analítica que describe el movimiento:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (18)$$

Como puntos se van a tomar; (0.0) y (570.144,1000)

$$y - 0 = \frac{1000 - 0}{570,144 - 0} (x - 0) \quad (19)$$

$$y = \frac{1000}{570,144} (x) \quad (20)$$

$$y = 1,753x \quad (21)$$

Entonces, de este modo se obtiene que la expresión que modela el número de vueltas en relación con la distancia es $f(x) = 1,753x$ con $x \geq 0$

5.4. Representación Gráfica

A continuación se presenta la representación gráfica de la situación de las vueltas de la rueda de una bicicleta que son necesarias para recorrer un kilómetro.

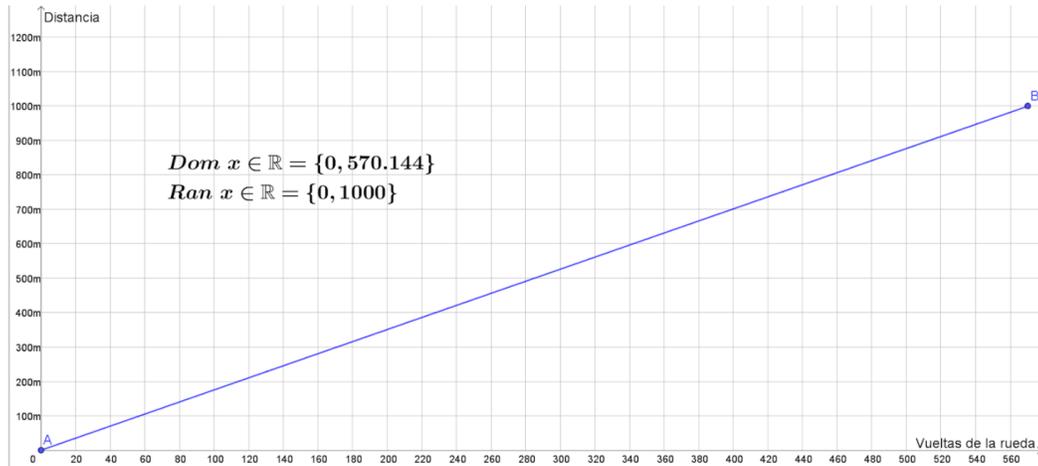


Figura 2: Representación gráfica de la situación expuesta