

Problemas – Tema 2

CCSS Problemas resueltos - 4 - cociente de polinomios con raíces simples

1. Calcula la siguiente integral en función de a y b . $I = \int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} dx$

$$I = \int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, al ser el grado del numerador menor que el grado del denominador y contar con dos raíces simples en el denominador.

$$\frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} = \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}$$

$$ax+b = C(x-2) + D(x-1)$$

$$\text{si } x=1 \rightarrow a+b = -C \rightarrow -(a+b) = C$$

$$\text{si } x=2 \rightarrow 2a+b = D$$

Es decir, podemos expresar la integral de la forma:

$$I = \int \frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{-(a+b)}{x-1} dx + \int \frac{2a+b}{x-2} dx = -(a+b) \ln|x-1| + (2a+b) \ln|x-2| + cte$$

Donde aplicamos valor absoluto al argumento de los logaritmos para garantizar que sean positivos.

2. Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x}{x^2+x-6} dx$

El grado del numerador es inferior al grado del denominador.

Obtenemos las raíces del denominador $\rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow x=2$, $x=-3 \rightarrow$ Dos raíces simples

Aplicamos método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{x}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \rightarrow \text{Hacemos m.c.m. e igualamos numeradores}$$

$$x = A(x+3) + B(x-2)$$

$$\text{Si } x=-3 \rightarrow -3 = A \cdot 0 + B(-5) \rightarrow B = \frac{3}{5}$$

$$\text{Si } x=2 \rightarrow 2 = A(5) + B \cdot 0 \rightarrow A = \frac{2}{5}$$

Llevamos estos resultados a la integral.

$$\int \frac{x}{x^2+x-6} dx = A \int \frac{1}{x-2} dx + B \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{3}{5} \ln|x+3| + C$$

3. Resuelve $I = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x^2 + x - 2)} dx$

$$I = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x^2 + x - 2)} dx = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)} dx \rightarrow \text{método de coeficientes indeterminados}$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)} \rightarrow \text{tres raíces simples en el denominador}$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\text{Si } x=0 \rightarrow -1 = -2A \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x=1 \rightarrow 6 = 3B \rightarrow B = 2$$

$$\text{Si } x=-2 \rightarrow -3 = 6C \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{2x} dx + \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{-1}{2(x+2)} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \ln|x| + 2 \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C$$

4. Resuelve $I = \int \frac{10}{x^2 - x - 6} dx$

$$I = \int \frac{10}{x^2 - x - 6} dx = 10 \int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx$$

Por el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \rightarrow 1 = A(x-3) + B(x+2)$$

$$\text{Si } x = -2 \rightarrow B = \frac{-1}{5}$$

$$\text{Si } x = 3 \rightarrow A = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto:

$$I = 10 \int \frac{\frac{1}{5}}{x-3} dx - 10 \int \frac{\frac{1}{5}}{x+2} = 2 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$$