Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa (PROPEP)
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica

ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

Apostila

Autores

Carlos José Borges Delgado
Clicia Valladares Peixoto Friedmann
Jacqueline de Cassia Pinheiro Lima

Outubro de 2010

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem da matemática não é uma tarefa simples, tanto para quem ensina quanto para quem aprende. Desde os primeiros anos do ensino fundamental, estendendo-se por todo ciclo básico e também pelo ensino superior, a matemática costuma ser responsável por muitos obstáculos e desafios a serem transpostos pelos alunos. A causa ? Difícil responder, pois não é apenas uma e, possivelmente, não será encontrado um consenso de todas as causas que contribuem para que isto ocorra. Mas qualquer esforço a fim de descobrir possíveis causas de a matemática ser um obstáculo para os alunos e iniciativas para minimizar as dificuldades no ensino de matemática são, portanto, bem vindos.

O tema Funções Matemáticas, por sua complexidade e abrangência, apresenta dificuldades especificas no ensino e na aprendizagem, sendo que uma delas se refere às diferentes representações (língua natural, forma algébrica, forma tabular e forma gráfica) desse objeto matemático, pois muitos alunos o confundem com as suas representações. Ao mesmo tempo é importante que o estudante "trafegue" entre elas para compreender o conceito e as propriedades das funções, assim como as suas aplicações.

Este produto apresenta as várias representações da função afim (língua natural, forma algébrica, forma tabular e forma gráfica) utilizando para tal os estudos dos "registros de representação semiótica para a aprendizagem matemática", de Raymond Duval[1], que propõe uma abordagem cognitiva para compreender: a) as dificuldades dos alunos na compreensão da Matemática; b) a natureza dessas dificuldades.

Inicialmente são apresentados atividades e exercícios de revisão sobre equações de 1º e 2º graus, resolução de sistema de equações e Teoria dos Conjuntos.

O tema Função Afim foi subdividido em quatro apostilas. Todas as apostilas apresentam, além do conteúdo teórico mínimo necessário para o tema envolvido, exercícios resolvidos e comentados. A primeira apostila envolveu a parte teórica

[1] Filósofo e psicólogo de formação, autor de trabalhos envolvendo a psicologia cognitiva e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. Sua principal obra é *Sémiosis et pensée humaine* (1995).

básica sobre funções: conceito de função, domínio, imagem, unicidade, variáveis, classificação e formas de representação. As três apostilas restantes são específicas sobre Função Afim, e envolvem sempre a presença de exercícios contextualizados ou interdisciplinares. Na segunda apostila foram trabalhadas as duas primeiras representações da função afim: língua natural e a forma algébrica. Na terceira, se introduziu a forma tabular e, na quarta a representação gráfica.

Em todas as apostilas foram trabalhadas as conversões (articulações) entre os vários registros presentes, bem como os tratamentos necessários nas resoluções dos exercícios resolvidos.

A – AULAS DE REVISÃO

A1 – Aula de Revisão 1

1ª Aula de Revisão

PARTE 1

No Ensino Fundamental são estudadas equações do 1º grau e equações do 2º grau. Descubra qual(is) das expressões abaixo são equações do 1º grau ou equações do 2º grau, quando escritas na forma geral.

1) $4x+1=4+x$	**8)** $10=2(4-x)$
2) $x=\dfrac{6-x}{x}$	**9)** $f(x)=2x^2-4x+4$
3) $3x^2(1+x)-4=0$	**10)** $8+6x=x^2$
4) $\dfrac{x+5}{x}=3$	**11)** $3x^2 \rangle 6+x$
5) $2x+8 \langle 0$	**12)** $x(2-3x)+2(x+3)=0$
6) $f(x)=5x+8$	**13)** $5x+10$
7) x^2+3x-9	**14)** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x+12}{6}$

Respostas:

a) São Equações do 1º grau as equações de números:

....

b) São Equações do 2º grau as equações de números:

....

(respostas no final da apostila)

1ª Aula de Revisão

PARTE 2

<u>1ª questão</u>: Uma equação do 1º grau de variável (incógnita) x tem como forma geral a expressão **ax + b = 0**, com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$. Determine os valores de **a** e **b** para cada uma das equações abaixo:

a) $4x + 1 = 4 + x$ → a =................ e b = ...

b) $\frac{x+5}{x} = 3$ → a =................ e b = ...

c) $10 = 2(4 - x)$ → a =................ e b = ...

d) $3x = 4$ → a =................ e b = ...

e) $5(1 - x) - 2x = 4$ → a =................ e b = ...

<u>2ª questão</u>: Uma equação do 2º grau de variável (incógnita) x tem como forma geral a expressão **ax² + bx + c = 0**, com **a**, **b** e **c** $\in \mathbb{R}$. Determine os valores de **a, b** e **c** para cada uma das equações abaixo:

a) $x = \frac{6 - x}{x}$ → a =............. b = ... c = ...

b) $8 + 6x = x^2$ → a =............. b = ... c = ...

c) $x(2 - 3x) + 2(x + 3) = 0$ → a =............. b = ... c = ...

d) $x^2 + \frac{3}{2} = 2$ → a =............. b = ... c = ...

e) $4x(x + 2) = 7x - 5 + x$ → a =............. b = ... c = ...

Utilize este espaço e o verso da folha para cálculos, se necessário

(respostas no final da apostila)

A2 – Aula de Revisão 2

2ª Aula de Revisão

Tente encontrar uma equação que permita chegar à solução, em cada uma das questões abaixo. A seguir desenvolva-a até descobrir o resultado final.

1ª questão: O triplo da idade de André mais 18 é igual a 81 anos. Qual é a idade de André ?

2ª questão: A sequóia é considerada a espécie de árvore mais alta do mundo. Se multiplicarmos por 2 a altura que uma sequóia pode atingir e adicionarmos 96 metros, obtemos 330 metros. Qual é a altura que essa árvore pode atingir ?

3ª questão: A soma de dois números consecutivos é 37. Quais são esses números?

4ª questão: Um ciclista desistiu da competição ao completar $1/4$ do percurso total. Se ele tivesse corrido mais 2 quilômetros, teria cumprido $1/3$ do percurso total. Quantos quilômetros tem o percurso total ?

5ª questão: Na casa de Geraldo tem um jardim de formato retangular com 38 metros de perímetro. O comprimento do jardim é 5 metros maior que sua largura. Quais são as dimensões do jardim da casa de Geraldo ?

6ª questão: A diferença atual entre a idade de Carlos e da Bruna é de 15 anos. Daqui a 5 anos a idade de Bruna será a metade da idade de Carlos. Quais são as idades atuais de Carlos e Bruna ?

Utilize este espaço e o verso da folha para os cálculos necessários

(respostas no final da apostila)

A3 – Aula de Revisão 3

3ª Aula de Revisão

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Carolina pergunta a Ana como ela pode escrever na forma de equação o que está pensando: "A soma de dois números é 7. Quais são esses possíveis números?"

Ana respondeu à Carolina: São 2 números, então primeiro deves representar um número por **x** e, o outro por **y**. Assim podes escrever a equação que pensou da seguinte forma: **x + y = 7**.

Esta equação tem duas incógnitas, **x** e **y**. Chamamos então de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

Entretanto, podemos ter situações que envolvem duas equações com duas incógnitas, em cada uma. Neste caso temos um **sistema de equações** na qual os valores de **x** e **y** devem satisfazer ao mesmo tempo as duas equações.

<u>Exemplo 1</u>: Dois números têm soma 111 e diferença 33. Quais são esses números ?

Se denominarmos um dos números de **x** e o outro por **y** então podemos construir um sistema de equações para esta situação.

$$\begin{cases} x + y = 111 \qquad (I) \\ x - y = 33 \qquad (II) \end{cases}$$

Temos 2 métodos principais para chegarmos à solução, vamos vê-los.

a) Método da Adição

Quando adicionamos membro a membro as equações I e II. Ele é o mais adequado quando o coeficiente de uma das incógnitas da 1ª equação (I) é o oposto do coeficiente da mesma incógnita da 2ª equação (II). Somando as duas equações eliminamos uma incógnita. Assim somando as equações I e II temos:

$$\begin{cases} x + y = 111 & (I) \\ x - y = 33 & (II) \end{cases}$$

$$2x + 0y = 144 \qquad x = \frac{144}{2} = 72$$

Com o valor de x=72, basta substituí-lo em qualquer uma das equações I ou II para encontrar o valor de y. Substituindo em I:

$$x + y = 111 \qquad 72 + y = 111 \qquad y = 111 - 72 = 39$$

Assim chegamos à solução, ou seja, aos números procurados: 39 e 72.

Nem sempre o sistema de equações se apresenta pronto para aplicarmos o método da adição diretamente. Neste caso devemos prepará-lo para que uma das incógnitas tenha o seu simétrico. Vamos a um exemplo.

<u>Exemplo 2</u>: A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e de Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos ?

Chamando a idade de Carlos de x e, a da Lúcia de y, temos: $\begin{cases} x + 2y = 125 & (I) \\ y = 2x & (II) \end{cases}$

Rearrumando a equação (II), ficamos com: $\begin{cases} x + 2y = 125 & (I) \\ -2x + y = 0 & (II) \end{cases}$

Observamos que os coeficientes das incógnitas não são simétricos. Neste caso, multiplicamos uma das equações por um número inteiro adequado, para que tenhamos coeficientes simétricos. Analisando nosso sistema, observamos que os coeficientes de x já possuem sinais contrários, assim basta multiplicar a equação (I) por 2.

$$\begin{cases} x + 2y = 125 & (I) \quad \times 2 \\ -2x + y = 0 & (II) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 250 & (I) \\ -2x + y = 0 & (II) \end{cases}$$

Podemos agora usar o método da adição no novo sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 250 & (I) \\ -2x + y = 0 & (II) \end{cases}$$

$$0x + 5y = 250 \qquad y = \frac{250}{5} = 50$$

Como o valor de y é a idade de Lúcia então concluímos que ela tem 50 anos. Substituindo y=50 na equação (I) temos:

$$y = 2x \qquad 50 = 2x \qquad x = \frac{50}{2} = 25$$

Resposta: Carlos tem 25 anos e Lúcia 50 anos

Exemplo 3: Encontre a solução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 90 & (I) \\ 2x + 4y = 160 & (II) \end{cases}$

Para rearrumar o sistema, podemos multiplicar a equação I por – 4, assim:

$$\begin{cases} 3x + y = 90 & (I) \quad \times(-4) \\ 2x + 4y = 160 & (II) \end{cases} \qquad \begin{cases} -12x - 4y = -360 & (I) \\ \quad 2x + 4y = \quad 160 & (II) \end{cases}$$

$$-10x + 0y = -200 \qquad x = \frac{-200}{-10} = 20$$

Substituindo x = 20 na equação I, temos: $3x + y = 90 \quad 60 + y = 90 \quad y = 90 - 60 = 30$

Resposta: x = 20 e y = 30.

b) Método da Substituição

Neste método, primeiro escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Depois substituímos, na outra equação, o valor da incógnita isolada e assim encontramos o valor da incógnita que estamos calculando. Substituindo seu valor em uma das duas equações iniciais, determinamos o valor da incógnita que isolamos inicialmente. Aplicando este método nos exemplos acima, teremos que encontrar as mesmas soluções encontradas pelo método da adição.

Exemplo 1: Dois números têm soma 111 e diferença 33. Quais são esses números ?

$$\begin{cases} x + y = 111 & (I) \\ x - y = 33 & (II) \end{cases}$$

Isolando o valor de x na equação (I), temos: x = 111 – y. Substituindo o valor de x na equação II: x – y = 33; 111 – y – y = 33; 111 – 2y = 33;

– 2y = 33 – 111; –2y = – 78; $y = \frac{-78}{-2} = 39$

Substituindo y=39 na equação (I): $x + y = 111 \quad x + 39 = 111 \quad x = 111 - 39 = 72$

Resposta: Os números procurados são 39 e 72.

<u>Exemplo 2</u>: A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Carlos e de Lúcia, sabendo que Lúcia tem o dobro da idade de Carlos ?

Chamando a idade de Carlos de x e, Lúcia de y, temos: $\begin{cases} x + 2y = 125 & (I) \\ y = 2x & (II) \end{cases}$

Observe que neste caso, a equação (II) já está com o valor de uma das incógnitas isolado (y = 2x), basta então substituí-lo na equação (I).

x + 2y = 125; x + 2(2x) = 125; x + 4x = 125;

5x = 125; $x = \frac{125}{5} = 25$

Substituindo x=25 na equação (I): x + 2y = 125; 25 + 2y = 125;

2y = 125 – 25 $2x = 100$ $x = \frac{100}{2} = 50$

Resposta: Carlos tem 25 anos e Lúcia 50 anos.

<u>Exemplo 3</u>: Encontre a solução do sistema $\begin{cases} 3x + y = 90 & (I) \\ 2x + 4y = 160 & (II) \end{cases}$

Na equação (I), o coeficiente da incógnita y é 1, então será mais fácil isolá-lo. Ficamos com: 3x + y = 90; y = 90 – 3x

Substituindo na equação (II), encontramos o valor de x.

2x+4y = 160; 2x+4(90 – 3x) = 160; 2x+360–12x = 160;

2x–12x = 160–360; –10x = – 200; $x = \frac{-200}{-10} = 20$

Substituindo x=20 na equação (I), temos: $3x + y = 90$ $60 + y = 90$ $y = 90 - 60 = 30$

Resposta: x = 20 e y = 30.

B – FUNÇÕES

FUNÇÕES

Antes de começar a falar de função em matemática, apresentarei um resumo de equações de 1º grau e de 2º grau, assuntos já vistos no ensino fundamental.

B1 – Equação do 1º grau

Uma equação do 1º grau é toda equação de incógnita x que tem como forma geral a expressão **ax+b=0**, com **a ≠ 0** e, **a** e **b** $\in \mathbb{R}$.

Como toda equação do 1º grau, existirá um <u>único</u> valor para x que tornará a expressão ax + b igual a zero. Não existirá nenhum outro valor diferente deste que tornará a igualdade ax + b = 0 verdadeira.

Exemplo – Seja a equação 2x – 10 = 0. Vamos determinar o valor de x para que a igualdade seja verdadeira (solução da equação) e sua representação na reta numérica.

Na equação 2x – 10 = 0 temos a = 2 e b = – 10.

$2x - 10 = 0$ somando 10 a ambos os lados da igualdade

$2x - 10 + 10 = 0 + 10$

$2x = 10$ dividindo por 2 ambos os lados

$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ achamos a solução da equação

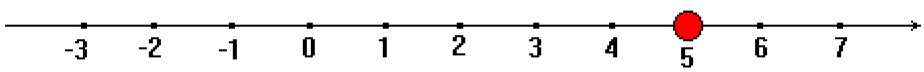
$x = 5$ Ao substituir x=5 na equação inicial, verificamos a igualdade 0=0

Prova real: 2x – 10 = 0 ∴ 2 . 5 – 10 = 0 ∴ 10 – 10 = 0 ∴ 0=0

O que comprova que x = 5 é a solução da equação 2x – 10 = 0

Representação da Solução da Equação do 1º Grau na Reta Numérica Real

Apenas o ponto 5 na reta numérica representa a solução da equação do 1º grau 2x–10=0



B2 – Equação do 2º grau

Uma equação do 2º grau é toda equação de incógnita x que tem como forma geral a expressão **$ax^2 + bx + c = 0$**, com $a \neq 0$ e, a, b e c $\in \mathbb{R}$.

A solução de uma equação do 2º grau dependerá do valor de $\Delta = b^2 - 4ac$. Existem três casos considerados. Chamando x_1 e x_2 as soluções da equação, temos:

Se $\Delta > 0$ então há duas soluções reais e distintas ($x_1 \neq x_2$);

Se $\Delta = 0$ então há uma única solução real ($x_1 = x_2$);

Se $\Delta < 0$ então não há solução dentro do conjunto dos Números Reais.

Exemplo – Seja a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$. Vamos determinar os valores de x para que a igualdade seja verdadeira e sua representação na reta numérica real.

Na equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ temos a = 1, b = – 2 e c = – 8.

$x^2 - 2x - 8 = 0$ usando a fórmula de Bhaskara ou a relação entre as soluções

a = 1 $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a}$ chegaremos aos valores de x_1 e x_2

b = – 2 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} \therefore \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \therefore \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \therefore \dfrac{2 \pm 6}{2}$

c = – 8 $x_1 = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ e $x_2 = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ Logo $x_1 = 4$ e $x_2 = -2$

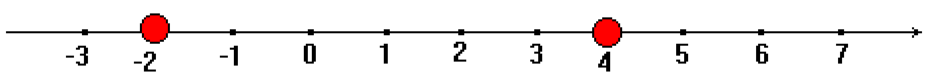
Prova real:

$x_1 = 4$	*$x_2 = -2$*
$x^2 - 2x - 8 = 0$	$x^2 - 2x - 8 = 0$
$4^2 - 2.4 - 8 = 0$	$(-2)^2 - 2.(-2) - 8 = 0$
$16 - 16 = 0$	$8 - 8 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Comprovando que $x_1 = 4$ e $x_2 = -2$ são as soluções da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$

Representação da Solução da Equação do 2º Grau na Reta Numérica Real

Os pontos –2 e 4 na reta numérica representam a solução da equação do 2º grau $x^2 - 2x - 8 = 0$



B3 – Teoria dos Conjuntos

A noção de conjunto é bastante simples e fundamental em matemática, pois a partir dela podem ser expressos todos os conceitos matemáticos.

Apresentaremos, a seguir, uma revisão sobre conjuntos[2], com as informações necessárias para o estudo da função afim.

B3.1 – Definição

Conjunto é uma coleção ou grupo de objetos, chamados elementos.

B3.2 – Convenções

a) Conjunto: indicamos com letras maiúsculas: A, B, C, ...

b) Elemento: indicamos com letras minúsculas ou por números.

Exemplos: A = { 1, 2, 3 } B = { a, e, i, o, u } C = { preto, vermelho}

c) Conjunto Unitário: é aquele que tem <u>um</u> elemento.

Exemplos: A = { 1 } B = { 20 } C = { x | x é mês com inicial f }

d) Conjuntos Iguais: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A for <u>elemento</u> de B e <u>todo</u> elemento de <u>B</u> for <u>elemento</u> de <u>A</u>. Simbolicamente, escrevemos: $A = B \Leftrightarrow \{ \forall x, x \in A \text{ e } x \in B \}$

Exemplos: a) { 1, 5, 7, 9 } = { 9, 5, 1, 7}
b) { 2, 4, 6 } = { 6, 2, 4 }

e) Conjuntos Disjuntos: Dois conjuntos são disjuntos quando <u>não possuem</u> elementos em <u>comum</u>.

Exemplos: A = { 3, 4 } e B = { 5, 6 }
C = { 8, -9, 10 } e D = { -8, +9, -10 }

---

[2] Não apresentaremos, nesta revisão de conjuntos, os conjuntos numéricos.

f) Conjunto Vazio: é aquele que não possui elemento.

Indicamos o conjunto vazio pelo símbolo ø ou por um par de chaves sem elemento entre elas: { }

Exemplo: $A = \{ x \mid x + 1 = x \}$, logo $A = ø$ ou $A = \{ \}$

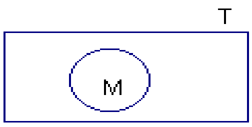
g) Subconjunto: Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A for também elemento de B.

Notação: $A \subset B$ _ Lê-se: "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B"

Simbolicamente, temos: $A \subset B \Leftrightarrow \{ \forall x, x \in A \rightarrow x \in B \}$

Exemplos: a) $\{ 0, 1 \} \subset \{ 0, 1, 2, 3 \}$

b) $\{ 2, 3, 5 \} \subset \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

c) $M \subset T$ 

Observações importantes:

1ª) Da mesma forma que dizemos que "A está contido em B", podemos dizer que "B contém A" e anotamos $B \supset A$.

2ª) Símbolos importantes:

$\subset$ Está Contido	$\not\subset$ Não Está Contido
$\supset$ Contém	$\not\supset$ Não Contém
$\in$ Pertence	$\notin$ Não Pertence

3ª) Os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ só podem ser usados para relacionar conjunto com conjunto.

4ª) O símbolo $\in$ deve ser lido como "é elemento de" ou "pertence a". O símbolo $\notin$ é negação de $\in$.

5ª) Estes símbolos, $\in$ e $\notin$, só podem ser usados para relacionar elemento com conjunto.

Exemplo: De acordo com os conjuntos $A = \{ 0, 1, 2 \}$ e $B = \{ 1, 3 \}$

$1 \in A$ $\quad 2 \notin B$ $\quad 0 \in A$ $\quad 3 \in B$ $\quad 1 \in B$

6ª) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

7ª) Dado um conjunto com n elementos, o total de subconjuntos pode ser calculado por: Nº Sub = 2^n

Exemplo: A = { 1, 2, 3 } ∴ n(A) = 3 ∴ Nº subconjunto = 2^3 = 8

B3.3 – Operações com Conjuntos

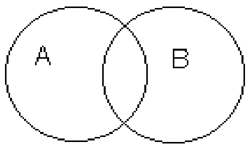
a) Reunião (ou união) de Conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, chama-se conjunto união de A e B ao conjunto C dos elementos que pertencem a A ou a B.

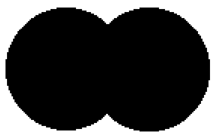
Simbolicamente: $C = A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$

Exemplos: a) { 1, 2 } ∪ { 3, 4 } = {1, 2, 3, 4}

b) { 1, 2, 3 } ∪ ø = {1, 2, 3}

c) { 1, 2 } ∪ { 4, 6 } ∪ { 3, 4 } = { 1, 2, 3, 4, 6 }

d) 

→ A ∪ B = 

Observações: 1) se A ⊂ B então A ∪ B = B

2) A ∪ ø = A

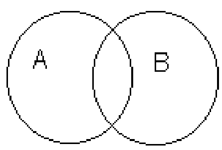
b) Intersecção de Conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B ao conjunto formado por elementos que pertençam simultaneamente a A e B.

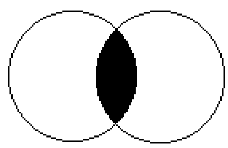
Simbolicamente: $C = A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$

Exemplos: a) { 1, 2, 3 } ∩{ 2, 3, 4 } = { 2, 3 }

b) { 2, 4, 6 } ∩{ 0, 1, 8 } = ø

c) { 1, 2, 3 } ∩ ø = ø

d) 

→ A ∩ B = 

Observações: 1) Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$

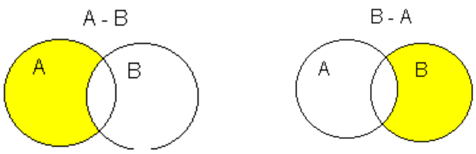
2) $A \cap \emptyset = \emptyset$

3) Se $A \cap B = \emptyset$ então os conjuntos A e B são chamados de disjuntos.

c) Diferença de Conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre conjuntos A e B (nesta ordem) ao conjunto C formado pelos elementos que pertençam exclusivamente ao conjunto A.

Simbolicamente: $C = A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$ ou $C = B - A = \{ x \mid x \in B \text{ e } x \notin A \}$

Exemplos: a) $\{a, b, f\} - \{b, c, d, e\} = \{a, f\}$
b) $\{b, c, d, e\} - \{a, b, f\} = \{c, d, e\}$
c) $\{2, 4\} - \{2, 4, 6\} = \emptyset$
d) $\{\} - \{2, 4\} = \emptyset$
e) $\{2, 4\} - \{\} = \{2, 4\}$

f) 

d) Complementar de B em A: Dados dois conjuntos A e B, com a condição de B estar contido em A, chama-se complementar de B em relação a A ao conjunto A - B e escrevemos:

$$\complement_A B = A - B$$

Exemplos: a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ $\quad \complement_A B = \{1,3,5\}$
b) $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{5, 6\}$ $\quad \complement_A B = \{3\}$

B3.4 – Intervalos Reais

São subconjuntos dos números reais, denominados intervalos, que são determinados por meio de desigualdades.

o Intervalo Aberto 

(a, b) ou] a, b [

• Intevalo Fechado 

[a, b]

Exemplos:

1) Intervalo aberto de extremos

(-1, 4) ou] -1, 4 [ou { x ∈ℝ| -1 < x < 4 }

2) Intervalo fechado de extremos

[-1, 4] ou { x ∈ℝ| -1≤ x ≤4 }

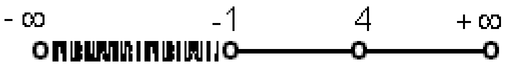
3) Intervalo aberto à esquerda ou fechado à direita

(-1, 4] ou] -1, 4] ou { x ∈ℝ| -1 < x ≤4 }

4) Intervalo aberto à direita ou fechado à esquerda

[-1, 4) ou [-1, 4 [ou { x ∈ℝ| -1 ≤ x < 4 }

5) Intervalos infinitos



(- ∞, -1) ou] - ∞, -1 [ou { x ∈ℝ| x < -1 }

(4, + ∞) ou] 4, + ∞ [ou { x ∈ℝ| x > 4 }

B4 – Função Matemática

O conceito de função é um dos mais importantes em matemática, está associado à análise da variação entre grandezas. Ao longo da história, o conceito de função sofreu alterações, somente no início do século XX, passou a ser associado como relações unívocas[3] entre conjuntos. Adotaremos a definição apresentada no livro "A Matemática do Ensino Médio – Vol. 1"- prof Elon Lages Lima et al, 2005.

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f:X \rightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x).

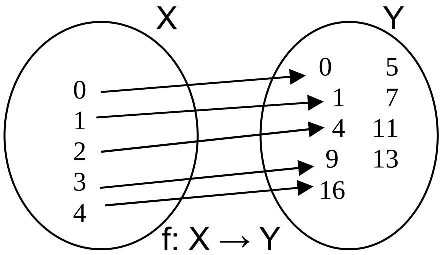
Observações:

1 – Seja a função $f:X \rightarrow Y$, o conjunto X é o domínio da função; o conjunto Y o contra-domínio e, o conjunto de todos os elementos de Y que estão associados ao conjunto X é o conjunto imagem. Representamos o domínio por D(f); o contra-domínio por CD(f) e a imagem por Im(f). O conjunto imagem é sempre um subconjunto do contra-domínio ($Im(f) \subset CD(f)$).

2 – Uma função não precisa ser uma relação entre conjuntos numéricos; relações entre objetos podem ser associados com funções. Por exemplo a relação entre as chaves de um chaveiro (domínio) e respectivos cadeados e portas (imagem). Seja X o conjunto que representa as chaves do chaveiro. O conjunto Y (contra-domínio) é o conjunto de todos os cadeados e portas. Para cada elemento x (chave) $\in$ X estará associado um <u>único</u> elemento y (cadeado ou porta) em Y.

---

[3] Unívoca: Um elemento do 1º só pode estar associado a um **único** elemento no 2º conjunto.



D(f) = X = {0,1,2,3,4}

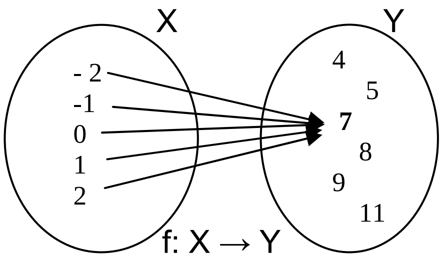
CD(f) = Y = {0,1,4,5,7,9,11,13,16}

Im(f) = {0,1,4,9,16}

f: $X \to Y$

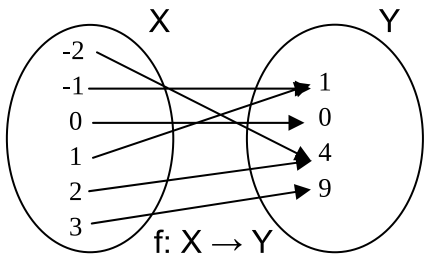
$x \mapsto f(x) = x^2$

3 – Em uma função, *cada um dos elementos x* $\in$ X do domínio só pode estar *associado a um único elemento y* $\in$ Y do contra-domínio. Entretanto, um elemento do contra-domínio pode estar associado a mais de um elemento do domínio.



f: $X \to Y$

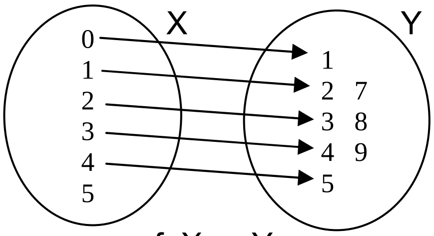
$x \mapsto f(x) = 7$



f: $X \to Y$

$x \mapsto f(x) = x^2$

4 – Não pode haver nenhum elemento *x* do domínio X que não esteja associado a um elemento y do contra-domínio Y.

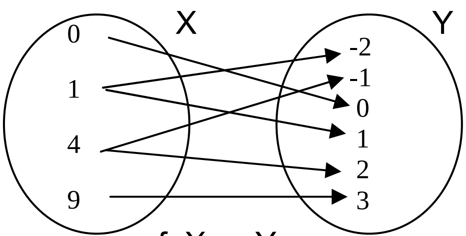


f: $X \to Y$

$x \mapsto f(x) = x + 1$

Não representa uma função porque o elemento 5 do domínio X <u>não</u> está associado a um elemento do contra-domínio Y.

5 – Não deve haver ambigüidades: a cada elemento x $\in$ X, deve-se fazer corresponder um *<u>único</u>* f(x) em Y.



f: $X \to Y$

Não representa uma função porque os elementos 1 e 4 do domínio X estão associados a <u>mais de um</u> elemento no contra-domínio Y.

6 – O exemplo acima será uma função se o conjunto Y for constituído de valores maiores ou iguais a zero. Com isso, cada elemento $x \in X$ teria correspondência a um único elemento $y \in Y$, já que $y \geq 0$.

7 – Uma função é composta por domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$. Mesmo quando é dito apenas "a função f", ficam subentendidos seu domínio X e seu contra-domínio Y. Sem que eles sejam especificados, não existe função.

8 – Os elementos $x \in X$ (domínio) são chamados de variáveis independentes, enquanto que os elementos $y \in Y$ (contra-domínio) são chamados de variáveis dependentes. O conjunto imagem é o conjunto formado pelos elementos y que estão associados a um ou mais elementos x. O conjunto imagem é um subconjunto do contra-domínio ($Im \subset CD$).

9 – Uma função pode ser classificada como Injetiva, Sobrejetiva ou Bijetiva. Uma função é ***injetiva*** (ou injetora) quando elementos diferentes do domínio estão associados a elementos diferentes no contra-domínio, ou seja: não existe nenhum elemento no contra-domínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Uma função é ***sobrejetiva*** (ou sobrejetora) quando todos os elementos do contra-domínio estão associados a pelo menos um elemento do domínio. Neste caso $CD(f)=Im(f)$. Uma função é ***bijetiva*** (ou bijetora) quando é, ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

10 – Uma função[4], com $D(f) \subset \mathbb{R}$ e $CD(f) \subset \mathbb{R}$, é *crescente* se para dois pontos quaisquer x_1 e x_2 do domínio, com $x_1 \neq x_2$, tivermos: $x_1 > x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$ ou $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$. Será decrescente se $x_1 > x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$ ou $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$.

[4] Observe que estamos considerando, neste caso, uma função algébrica, já que tanto o domínio quanto o contradomínio pertencem ao conjunto dos números reais. Não se esqueça que uma função pode expressar a relação entre dois objetos, não necessariamente numéricos (observação 2).

B4.1 – Formas de Representação de uma Função Afim

Uma função afim pode ser representada de diversas maneiras, embora estejamos falando do mesmo objeto matemático função e numa mesma situação.

a) Língua Natural

É a forma escrita de uma situação qualquer que se comporta como uma função.

Exemplo: Dona Maria vai ao mercado comprar carne, que está em oferta. Ela decidiu comprar alcatra que está a R$9,00 o quilo. Determine um modo de se calcular o valor a ser pago pela Dona Maria por uma quantidade qualquer de alcatra.

b) Expressões algébricas

É a forma de escrevermos a lei de formação (correspondência) que associa cada elemento $x \in X$ a cada um dos elementos $y \in Y$, ou seja $x \mapsto f(x)$. Para o exemplo acima devemos encontrar uma expressão que represente a situação descrita. É fácil perceber que basta multiplicarmos o preço da carne pelo peso. Chegamos então à expressão $f(x) = 9x$.

Observe que f(x) representa o valor a ser pago, que *depende* da quantidade "x" de carne comprada, já que o preço por quilo é constante (R$ 9,00). Assim "x" é a variável independente e f(x) a variável dependente.

A expressão $f(x) = 9x$ é uma função que representa a situação descrita no "item a: língua natural". Estamos representando de 2 formas distintas uma mesma situação real.

c) Tabelas de valores

É também uma forma de apresentarmos uma informação. Escolhemos um valor para uma das variáveis (x ou f(x)) e determinamos o valor da outra variável através da lei de formação.

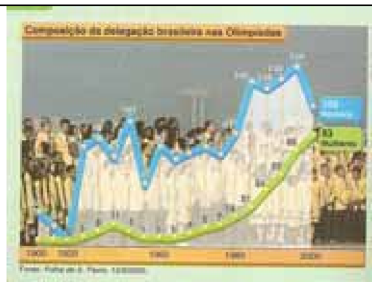
x	f(x) = 9x
1 kg	R$ 9,00
1,5 kg	R$ 13,50
3 kg	R$ 27,00
5 kg	R$ 45,00
6,35 kg	R$ 57,15

Podemos ler cada uma das linhas de duas maneiras distintas, porém com o mesmo significado. Analisando a 1ª linha temos: Se compramos 1 kg pagamos R$9,00 pela carne ou, se pagamos R$9,00 pela carne significa que estamos comprando 1 kg.

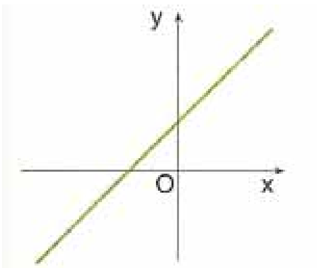
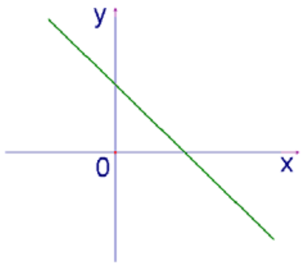
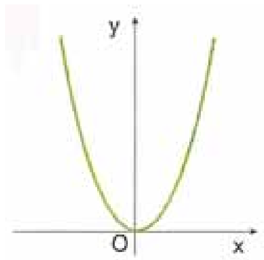
Também é possível, a partir de uma tabela de dados qualquer determinarmos a(s) lei(s) de correspondência que representa(m) a associação das variáveis. Esta situação é muito comum em pesquisas estatísticas.

d) Representação gráfica.

É mais uma forma de apresentarmos uma informação. Diariamente observamos em jornais e revistas gráficos, a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que eles representam. Observe os 2 gráficos abaixo.



As funções Afim (grau 1) e Quadrática (grau 2) possuem comportamento próprio e estão demonstrados abaixo.

Função Afim (crescente)	Função Afim (decrescente)	Função Quadrática
		

C – FUNÇÃO AFIM[5]

C1 – Função Afim – Parte 1

FUNÇÃO AFIM - Parte 1

Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada pela lei de formação **f(x) = ax + b**, com **a ≠ 0** e, **a** e **b** $\in \mathbb{R}$.

Na função f(x)=ax+b, o número ***a*** é chamado de coeficiente de x e o número ***b*** é chamado de termo constante.

Observe que quando fazemos f(x)=0, a função afim se transforma em ax+b=0, que é uma equação de 1º grau.

Nesta apostila trabalharemos com apenas duas representações de função: *Língua Natural* (forma escrita) e a *Forma algébrica* (f(x)=ax+b)

Exemplos de função afim:

• $f(x) = 5x - 3$	em que	$a=5$	e	$b=-3$
• $f(x) = -4x + 2$	em que	$a=-4$	e	$b=2$
• $f(x) = -\frac{1}{2}x - 7$	em que	$a=-\frac{1}{2}$	e	$b=-7$
• $f(x) = -3x + \frac{2}{3}$	em que	$a=-3$	e	$b=\frac{2}{3}$

Casos Particulares da função afim[6]

1. – Função Identidade

   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = x. Neste caso a=1 e b=0.

   Exemplo: f(x) = x

2. – Função Linear

   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax. Neste caso a≠1 e b=0.

   Exemplos: $f(x) = \frac{1}{4}x$; $f(x) = 8x$; $f(x) = -4x$; $f(x) = \sqrt{3}\,x$

[5] O item C tem como referencial teórico principal Lima, E. L. et al (2005) e Iezzi, G. et al (2005).
[6] Não será considerada a função constante (f(x)=b) como um caso particular da função afim.

Exemplo 1: Expresse por meio de uma expressão matemática a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número real **x** associa:

a) o seu triplo;
b) a sua terça parte;
c) o seu dobro diminuído de 3;
d) a sua metade somada com 5.

Respostas:

A lei de formação de uma função afim é dada por f(x) = ax + b, então:

a) Triplo é multiplicar por 3, logo: **f(x) = 3x** (o termo constante b é zero)

b) Terça parte é dividir por 3, assim: **f(x) =** $\frac{1}{3}$**x** (o termo constante b é zero)

c) Dobro é multiplicar por 2. Não esquecer em diminuir 3 na expressão: **f(x) = 2x – 3**

d) Metade é dividir por 2. Não esquecer em somar 5 na expressão: **f(x) =** $\frac{1}{2}$**x + 5**

Exemplo 2: Um posto de gasolina cobra R$2,50 pelo litro da gasolina e R$1,90 pelo litro do álcool.

a) Encontre o valor a ser pago por um cliente que coloca 10 litros e 40 litros de combustível, respectivamente.

b) Encontre a lei de formação para cada um dos combustíveis.

Respostas:

a) Vamos calcular o gasto para cada um dos combustíveis. Note que o termo constante b é igual a zero.

a.1) Gasolina

O preço da gasolina é R$2,50 / litro, então os valores a serem pagos por 10 e 40 litros serão, respectivamente: 10 x 2,50 = R$ 25,00 e 40 x 2,50 = R$ 100,00.

a.2) Alcool

O preço da alcool é R$1,90 / litro, então os valores a serem pagos por 10 e 40 litros serão, respectivamente: 10 x 1,90 = R$ 19,00 e 40 x 1,90 = R$ 76,00.

b) A lei de formação

No item anterior, é possível observar que o preço pago dependeu do preço por litro e o número de litros colocados, assim, o preço representa o coeficiente a de x e o número de litros a variável independente x. O preço final será o valor calculado, ou seja: f(x). Assim:

b.1) Gasolina: f(x) = 2,5 x

b.2) Álcool: f(x) = 1,9 x

Exemplo 3: A fórmula que dá o número do sapato (N) em função do comprimento (c) do pé, em centímetros, é $N = \frac{5c + 28}{4}$. Calcule:

a) o número do sapato quando o comprimento do pé é de 24 cm.

b) o comprimento do pé de quem calça 40.

<u>Respostas</u>:

Como o valor de N depende do valor de c, então N é a variável dependente f(x) e o valor de c a variável independente x.

a) O valor dado foi c=24, substituindo na fórmula: $N = \frac{5 \cdot 24 + 28}{4} = \frac{120 + 28}{4} = \frac{148}{4} = 37$

b) Para N=40, temos: $40 = \frac{5c + 28}{4} \therefore 40 \cdot 4 = 5c + 28 \therefore 5c = 160 - 28 \therefore c = \frac{132}{5} = 26{,}4\ cm$

Exemplo 4: Uma firma que conserta televisores cobra de visita uma taxa fixa de R$40,00 mais R$10,00 por hora de mão-de-hora. Sabendo-se que o preço a ser pago pelo conserto de um televisor é dado em função do número de horas de trabalho, encontre sua lei de formação. Quanto pagará um cliente por um conserto que durou 3 horas para ser realizado?

<u>Respostas</u>:

Há a cobrança de uma taxa de visita (R$40,00), valor este que independe do tempo do conserto do televisor. Esta taxa é o termo constante b.

A variável x será o tempo do conserto, assim, o valor de a (coeficiente de x) será igual a R$10,00 (valor cobrado por hora de mão-de-obra).

A lei de formação ou função f(x) será o valor a ser pago por um conserto.

Assim, a lei de formação será dada pela expressão $f(x) = 10x + 40$

Um cliente gastará por 3 horas de conserto o valor de:

$f(x) = 10x + 40 \therefore f(3) = 10 . 3 + 40 \therefore f(3) = 30 + 40 \therefore f(3) = 70 \therefore$ Resp.: R$70,00

Exemplo 5[7]: (UFMG) O valor V, em reais, da conta mensal de energia elétrica é calculado a partir do consumo C, em kWh. Para consumos inferiores ou iguais a 200 kWh, o valor do kWh é de R$0,30. No entanto, para consumos superiores, o valor do kWh é acrescido de 50% para a parcela que exceder a 200 kWh.

a) Calcule o valor de V correspondente a um consumo de 180 kWh no mês.

b) Calcule o valor de V correspondente a um consumo de 500 kWh no mês.

Respostas:

a) Consumo de 180 kWh no mês

O consumo é inferior a 200 kWh, então o valor do kWh é de R$0,30. O valor V a ser cobrado de energia elétrica será dado pela função $f(x) = 0,3x$, logo

$f(x) = 0,3x \quad \therefore \quad f(180) = 0,3 . 180 \quad \therefore \quad f(180) = 54 \quad \therefore$ O valor V será de R$54,00

b) Consumo de 500 kWh no mês

O consumo é superior a 200 kWh, teremos então dois valores de kWh:

R$0,30 para consumos até 200kWh e,

R$0,45 (R$0,30 + 50% de R$0,30) para consumos que ultrapassam 200kWh.

No item a vimos que a função correspondente a consumos inferiores ou iguais a 200 kWh é $f(x)=0,3x$. Como o consumo é superior a 200kWh, então este valor será um valor fixo de $f(200)= 0,3 . 200 =$ R$60,00

O valor a ser pago na conta pelo consumo que ultrapassou os 200 kWh será de R$0,45 o kWh. Se chamarmos de x o consumo total, então o que ultrapassou será de $x – 200$, logo a função deste consumo excedente é $f(x) = 0,45(x – 200)$

A função, para consumo superior a 200kWh, é dada por $f(x)=0,45(x–200)+60$

$f(x) = 0,45(x – 200) + 60 \therefore f(500) = 0,45(500 – 200) + 60 \therefore f(500) = 0,45 . 300 + 60$

$f(500) = 135 + 60 \quad \therefore \quad f(500) = 195 \quad \therefore$ O valor V será de R$195,00

[7] GIOVANNI, J.R.; Bonjorno J.R. Matemática Completa. São Paulo: FTD, 2005, pág. 157.

Observação: No exemplo 3, aparece o que chamamos de função definida por mais de uma sentença, porque para intervalos diferentes do domínio, a função se altera. No exercício 3, o valor a ser cobrado depende da faixa de consumo. Importante salientar que, neste caso, o domínio (consumo de energia) será maior ou igual a zero ($x \geq 0$) porque não existe consumo negativo.

Podemos expressá-la da seguinte maneira: $f(x) = \begin{cases} 0{,}3x, & se \ \ x \leq 200 \\ 0{,}45(x-200)+60, & se \ \ x > 200 \end{cases}$

Exemplo 6: Duas empresas telefônicas, X e Y, prestam serviço à cidade de Mengolândia. A empresa **X** cobra, por mês, uma assinatura de R$35,00 mais R$0,50 por minuto utilizado. A empresa **Y** cobra, por mês, uma assinatura de R$26,00 mais R$0,65 por minuto utilizado. A partir de quantos minutos de utilização o plano da empresa **X** passa a ser mais vantajoso para os clientes do que o plano da empresa **Y** ?

Resposta:

Primeiro devemos determinar a função correspondente a cada empresa telefônica. Para não haver confusão, já que teremos uma função para cada uma das empresas, chamaremos de:

f(x) = ax + b a função da Empresa X e g(x) = cx + d a função da Empresa Y.

A empresa X cobra uma assinatura de R$35,00 mais R$0,50 por minuto utilizado, então temos que o coeficiente a é igual a R$0,50, já que a variável x corresponde ao número de minutos utilizado. O termo independente b corresponde à assinatura cobrada de R$35,00 e, a função f(x) representará o valor da conta. Temos então f(x) = 0,5x + 35

A empresa Y cobra uma assinatura de R$26,00 mais R$0,65 por minuto utilizado, então temos que o coeficiente c é igual a R$0,65, já que a variável x corresponde ao número de minutos utilizado. O termo independente d corresponde à assinatura cobrada de R$26,00 e, a função g(x) representará o valor da conta. Temos então g(x) = 0,65x + 26

É fácil perceber quando o consumo for zero que a empresa Y será mais vantajoso, já que cobra menor assinatura. Consumo zero significa x=0.

Empresa X: f(0) = 0,5 . 0 + 35 = R$35,00

Empresa Y: g(0) = 0,65 . 0 + 26 = R$26,00

Pergunta-se: até que consumo a empresa Y será mais vantajosa ?

Para responder a esta pergunta devemos determinar para qual consumo, em minutos, as empresas X e Y cobram o mesmo valor, ou seja X=Y. Para tal igualamos as funções das empresas X e Y, fazendo f(x) = g(x).

$0{,}65x + 26 = 0{,}5x + 35 \therefore 0{,}65x - 0{,}5x = 35 - 26 \therefore 0{,}15x = 9$ (multiplicando por 100)

$15x = 900 \quad \therefore \quad x = 60$ minutos

Temos duas informações importantes agora: Para consumo zero (x=0) a empresa Y cobra menor valor. Para um consumo de 60 min (x=60) as empresas X e Y cobram o mesmo valor (que não calculamos). Fica fácil perceber então que, para consumos superiores a 60 min (x > 60) a empresa X cobrará um valor menor que a empresa Y. Estas informações estão na tabela abaixo. Importante salientar novamente que, neste caso, o domínio será maior ou igual a zero ($x \geq 0$) porque não existe consumo negativo.

Consumo <u>inferior</u> a 60min (**0 ≤ x < 60**)	Consumo <u>igual</u> a 60min (**x = 60**)	Consumo <u>superior</u> a 60min (**x > 60**)
Empresa Y	Empresa X = Empresa Y	Empresa X

Resposta: O plano da empresa X passa a ser mais vantajoso do que o plano da empresa Y quando o consumo for superior a 60 minutos.

C2 – Função Afim – Parte 2

FUNÇÃO AFIM - Parte 2

Na apostila Função Afim – Parte 1, trabalhamos 2 formas de representações no estudo de função afim: Língua natural e Expressão algébrica.

Introduziremos agora mais uma representação: Tabular (tabela de valores).

A tabela de valores é uma ferramenta auxiliar para a construção do gráfico da função. A partir dela também podemos determinar a lei de formação da função. Não se esqueça que podemos representar uma mesma função de várias maneiras (até agora: língua natural, expressão algébrica e tabular) e fazer a conversão (mudança de uma representação para outra) entre elas.

A tabela de valores poderá ter 2 ou 3 colunas. Na 1ª coluna serão colocados os valores da variável x; na 2ª coluna serão os valores da função f(x); na 3ª coluna poderão ou não ser colocados os pares ordenados (x,f(x)).

Exemplos de representação tabular:

a) f(x) = x – 3

x	**f(x) = x – 3**	**(x, f(x))**
– 5	f(–5) = – 5 – 3 = – 8	(–5 , – 8)
0	f(0) = 0 – 3 = – 3	(0 , – 3)
10	f(10) = 10 – 3 = 7	(10 , 7)

b) O dobro de um número mais 4

x	**f(x) = 2x + 4**	**(x, f(x))**
– 3	f(–3) = 2.(– 3) + 4 = – 2	(– 3 , – 2)
0	f(0) = 2.0 + 4 = 4	(0 , 4)
15	f(15) = 2.15 + 4 = 34	(15 , 34)

Exemplo 1[8]: Para levar uma carga de caminhão dentro de um Estado, uma transportadora cobra R$10,00 fixos mais R$0,50 por quilo de carga. O preço do frete (f(x)) é função da massa em quilogramas (x) da carga. Construa uma tabela de valores para o transporte de 10 kg, 20 kg, 50kg, 80kg e 100kg.

Resposta:

Para determinar o valor do frete para cada uma das massas acima, primeiro temos que achar a lei de formação deste caso. O coeficiente a é igual a R$0,50, já que a variável x corresponde à massa a ser transportada. O termo independente b corresponde a R$10,00 e, a função f(x) representará o valor do frete. Temos então **f(x) = 0,5x + 10**.

Massa (kg) x	**Valor do frete (R$) f(x) = 0,5x + 10**	**(x, f(x))**
10	15	(10,15)
20	20	(20,20)
50	35	(50,35)
80	50	(80,50)
100	60	(100,60)

f(10) = 10 . 0,5 + 10 = 5 + 10 = R$15,00
f(20) = 20 . 0,5 + 10 = 10 + 10 = R$20,00
f(50) = 50 . 0,5 + 10 = 25 + 10 = R$35,00
f(80) = 80 . 0,5 + 10 = 40 + 10 = R$50,00
f(100) = 100 . 0,5 + 10 = 50 + 10 =R$60,00

[8] VASCONCELLOS, M.J.C. de; et al. Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004, pág. 37.

Exemplo 2: Em um posto de gasolina o preço da gasolina é de R$2,60. Construa uma tabela para algumas quantidades de gasolina. Depois encontre a expressão matemática que relaciona o valor a ser pago em função do tempo da quantidade de combustível.

Resposta:

Quant. (litros) **x**	**Valor a Pagar (R$)** **f(x) = ?**	**(x, f(x))**
1	2,60	(1 ; 2.6)
2	5,20	(2 ; 5.2)
3	7,80	(3 ; 7.8)
4	10,40	(4;10.4)
5	13,00	(5 ; 13)

Observe que foram escolhidas quantidades de litros (x) que facilitaram os cálculos e a descoberta da lei de formação. Não se esqueçam que: O valor de x não poderia ser negativo porque não existe quantidade negativa e, que o valor de x poderia ser qualquer valor dentro do campo dos números reais positivo ($x \in \mathbb{R}_+$).

Com os valores escolhidos ficou fácil observar que o valor a ser pago será igual a quantidade de litros colocados multiplicado pelo preço por litro, logo a função será f(x)=2,6x

Obs.: Nem sempre será fácil encontrar a função f como neste exemplo. Nestes casos teremos que montar um sistema de equações. Vide exemplos abaixo.

Exemplo 3[9]: Complete a tabela abaixo com os valores que estão faltando.

x	**f(x)**	**(x, f(x))**
– 2	– 9	(– 2, – 9)
– 1	– 4	(– 1, – 4)
0	1	(0,1)
1	6	(1,6)
2		(2,)
3		(3,)
4		(4,)
5		(5,)

Resposta:

Neste exemplo, não é imediata a descoberta da lei de formação (função) que está presente, nem é fácil descobrir os valores que estão faltando.

[9] DANTE, L.R. Matemática, Volume Único. São Paulo: Editora Ática, 2008, pág. 47.

Uma função afim se expressa na forma algébrica como: f(x)=ax+b, com a,b≠0. Na tabela acima temos valores de x e f(x), devemos então descobrir os valores de a e b. Necessitamos construir um sistema de equações com duas variáveis.

Podemos utilizar duas linhas quaisquer da tabela acima. Como temos uma linha com x = 0, então esta será uma das escolhidas para facilitar os cálculos. A segunda linha pode ser qualquer outra que esteja completa. Aplicando os valores da tabela em f(x)=ax + b temos:

Na equação (I) temos que **b=1**

Substituindo b = 1 em (II) temos

6 = a + b

6 = a + 1

a = 5

Substituindo os valores de a = 5 e b = 1 em f(x) = ax + b encontramos **f(x) = 5x + 1** que é a função procurada.

Podemos agora completar a tabelar, calculando os valores que faltam.

x	f(x)	(x, f(x))	
– 2	– 9	(– 2, – 9)	
– 1	– 4	(– 1, – 4)	
0	1	(0,1)	
1	6	(1,6)	
2	11	(2,11)	f(2) = 5 . 2 + 1 = 11
3	16	(3,16)	f(3) = 5 . 3 + 1 = 16
4	21	(4,21)	f(4) = 5 . 4 + 1 = 21
5	26	(5,26)	f(5) = 5 . 5 + 1 = 26

Exemplo 4: Sabendo que a função f(x) = ax + b é tal que f(1) = 5 e f(–2) = – 4, determine o valor de f(6).

Resposta:

A partir da forma algébrica f(x)=ax+b, podemos verificar que se f(1) = 5 então x = 1 e f(x) = 5. Da mesma forma se f(–2) = – 4 então x = – 2 e f(x) = – 4. Para determinar f(6) devemos encontrar a lei de formação (função). Construindo uma tabela com esses valores, teremos:

x	f(x)
1	5
– 2	– 4

Montando um sistema de equações com esses valores: $\begin{cases} 5 = 1a + b & (I) \\ -4 = -3a + b & (II) \end{cases}$

Fazendo (I) – (II) temos

5 – (–4) = a + b – (–3a + b)

5 + 4 = a + 4a + b – b

9 = 5a

$a = \frac{9}{5}$

Substituindo o valor de **a** em (I) ou (II) encontramos **b**

$5 = \frac{9}{5} + b \quad \therefore \quad 5 - \frac{9}{5} = b \quad \therefore \quad b = \frac{16}{5}$

Substituindo os valores de **a** e **b** em f(x) = ax + b encontramos $f(x) = \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}$

Como queremos f(6), basta substituir na função: $f(6) = \frac{9}{5} \cdot 6 + \frac{16}{5} \;\therefore\; f(6) = \frac{54}{5} + \frac{16}{5} \;\therefore$

$f(6) = \frac{70}{5}$ ∴ f(6)=14

Exemplo 5[10]: Biólogos descobriram que o número de sons emitidos por minuto por certa espécie de grilos está relacionado com a temperatura. A relação é quase linear. A 20 ºC, os grilos emitem cerca de 124 sons por minuto. A 28 ºC, emitem 172 sons por minuto. Encontre a equação que relaciona a temperatura em Celsius **C** e o número de sons **n**.

Resposta:

Temperatura (ºC) x	**Número de Sons f(x) = ?**	**(x, f(x))**
20	124	(20 ; 124)
28	172	(27 ; 172)

Observe que o número de sons depende da temperatura. A variável x representa a tempera-tura enquanto que a função f(x) representa o número de sons emitidos pelos grilos.
Como não é possível número de sons menores que zero, então f(x) $\in \mathbb{R}_+$.

Montando um sistema de equações com esses valores: $\begin{cases} 124 = 20a + b & (I) \\ 172 = 28a + b & (II) \end{cases}$

[10] DANTE, L.R. Matemática, Volume Único. São Paulo: Editora Ática, 2008, pág. 111.

Fazendo (II) – (I) temos

172–124=28a+b–(20a+b)

48 = 28a – 20a + b – b

48 = 8a

$a = \frac{48}{8} = 6$

Substituindo o valor de **a** em (I) ou (II) encontramos **b**

$124 = 20 \cdot 6 + b \quad \therefore \quad 124 - 120 = b \quad \therefore \quad b = 4$

Substituindo os valores de **a** e **b** em f(x) = ax + b encontramos

f(x) = 6x + 4 ou C = 6n + 4

Exemplo 6[11]: (Fuvest-SP) A tabela abaixo mostra a temperatura das águas do oceano Atlântico (ao nível do equador) em função da profundidade.

Profundidade (m)	Temperatura (ºC)
Superfície	27
100	21
500	7
1 000	4
3 000	2,8

Admitindo que a variação da temperatura seja aproximadamente linear entre cada duas medições feitas para a profundidade, a temperatura prevista para a profundidade de 400m é:

a) 16 ºC b) 14 ºC c) 12,5 ºC d) 10,5 ºC e) 8 ºC

Resposta:

Primeira observação a respeito deste exemplo é saber quais valores da tabela devemos utilizar para a resolução deste exemplo. Como queremos determinar a temperatura para uma profundidade de 400 m, e este valor está entre 100m e 500m, então montaremos um sistema com estes valores.

Utilizando as linhas 2 e 3 da tabela acima, temos: $\begin{cases} 21 = 100a + b & (I) \\ 7 = 500a + b & (II) \end{cases}$

11 IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN D.; PÉRIGO R.; ALMEIDA N. de. Matemática: Ciência e Aplicações. Atual Editora, 2005, pág. 93.

Fazendo (II) – (I) temos

7–21 = 500a + b – (100a + b)

– 14 = 500a – 100a + b – b

– 14 = 400a

$a = \frac{-14}{400} \quad \therefore \quad a = \frac{-7}{200}$

Substituindo o valor de **a** em (I) ou (II) encontramos **b**

$21 = 100 \cdot \frac{-7}{200} + b \quad \therefore \quad 21 = \frac{-7}{2} + b \quad \therefore \quad 21 = -3{,}5 + b \quad \therefore$

$21 + 3{,}5 = b \quad \therefore$ b = 24,5

Substituindo os valores de a e b em f(x) = ax + b encontramos $f(x) = \frac{-7}{200}x + 24{,}5$ que é a função que exprime a variação de temperatura para profundidades entre 100 m e 500 m.

Aplicando a função para uma profundidade de 400 m temos

$f(400) = \frac{-7}{200} \cdot 400 + 24{,}5 \quad \therefore \quad f(400) = -7 \cdot 2 + 24{,}5 \quad \therefore \quad f(400) = -14 + 24{,}5$

f(400) = 10,5 ºC

Resposta: Letra D

C3 – Função Afim – Parte 3

FUNÇÃO AFIM - Parte 3

Na apostila Função Afim – Partes 1 e 2, trabalhamos três formas de representações no estudo de função afim: Língua Natural, Formas Algébrica e Tabular.

Introduziremos agora mais uma forma de representação da função afim: Representação Gráfica.

A representação gráfica é uma ferramenta poderosa na análise de uma função. A partir dela podemos determinar a lei de formação da função, seu comportamento (crescente ou decrescente), sinal etc.

O gráfico da função f(x)=ax+b é uma reta oblíqua em relação aos eixos x e y.

É necessário e suficiente apenas 2 pontos, distintos, para determinarmos uma reta e esta será única. Não haverá outra reta que passará, ao mesmo tempo, por estes dois pontos.

Para a construção do gráfico utilizaremos o Plano Cartesiano, e consideraremos y = f(x).

Plano Cartesiano

Construção do Plano Cartesiano:

1º Passo: desenhamos 2 eixos perpendiculares e usamos a sua interseção “O” como origem;

2º Passo: colocamos 2 setas, uma em cada eixo, para marcamos a direção de crescimento de cada eixo. No eixo horizontal será na extremidade à direita da origem O e, no eixo vertical será na extremidade acima da origem O;

3º Passo: O eixo horizontal é o eixo das abscissas e, o eixo vertical é o eixo das ordenadas. Cada abscissa e ordenada será representada, respectivamente, por “x” e “y”.

Marcação de um ponto no Plano Cartesiano:

Um ponto P em um plano Cartesiano será determinado por seu “par ordenado”. Um par ordenado é o conjunto formado por dois números em certa ordem. Usa-se a notação (x,y) para indicar o par ordenado em que *x* é o primeiro elemento e *y* o segundo. O valor de *x* será o valor a ser marcado no eixo horizontal (eixo X) e, o valor de *y* será o valor a ser marcado no eixo vertical (eixo Y). Representações: P(x,y) ou P(x, f(x)) ou $P(x_P,y_P)$.

Note que os pontos A(1,2) e B(2,1) são pontos distintos pois diferem entre si pela ordem de seus elementos.

Para encontrarmos o ponto P(x,y) no plano cartesiano seguimos os seguintes passos:

1º Passo: marcamos no eixo horizontal o ponto *x*;

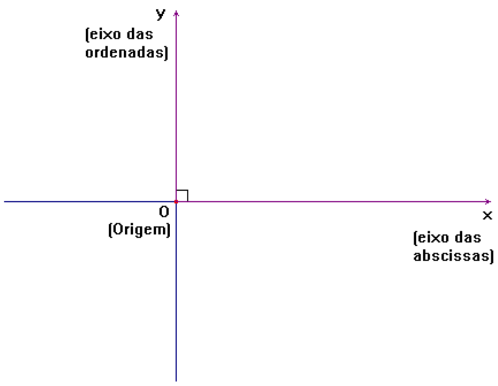
2º Passo: marcamos no eixo vertical o ponto y;

3º Passo: traçamos por x uma reta *r* paralela ao eixo vertical y;

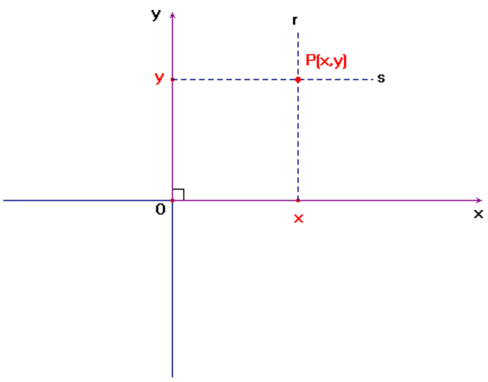
4º Passo: traçamos por y uma reta *s* paralela ao eixo vertical x;

5º Passo: a interseção das retas *r e s* será o ponto P(x,y).

<u>Observações</u>: 1 - Em uma função, o eixo horizontal é o eixo do domínio (valores de x) e o eixo vertical é o das imagens (valores de f(x)), que são obtidos a partir da lei de formação (expressão algébrica); 2 - Na origem O, os valores de x e y são iguais a zero: O(0,0).



Plano Cartesiano



Ponto P no Plano Cartesiano

Exemplo 1: Construa, num sistema de eixos ortogonais, o gráfico das funções: f(x)=2x–3 e f(x)=–x+1

<u>Respostas:</u>

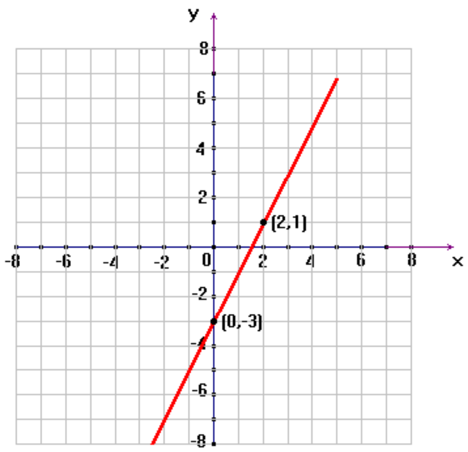
O gráfico de uma função afim é uma reta. Por dois pontos quaisquer passa uma <u>única</u> reta. Assim para construirmos o gráfico de uma função afim, basta encontrarmos as coordenadas de dois pontos que pertencem a esta função. Para determinarmos esses dois pontos construímos uma tabela de valores.

Obs.: Normalmente um dos pontos escolhidos é o de coordenada (0,y), com x=0, porque está sobre o eixo Y ou, o de formato (x,0), com f(x) = y = 0, que está sobre o eixo X.

a) f(x) = 2x – 3

Tabela de Valores

x	f(x) = 2x – 3	(x, f(x))
0	f(0) = 2.0 – 3 = –3	(0 , –3)
2	f(2) = 2.2 – 3 = 1	(2 , 1)

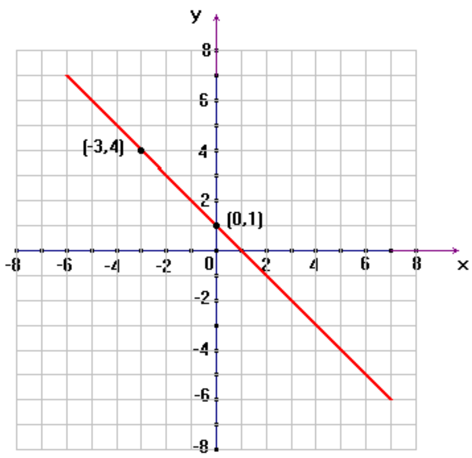


Obs.: Os valores atribuídos a x na tabela (0 e 2) são aleatórios. Se tivéssemos escolhido outros dois valores o gráfico seria o mesmo.

b) f(x) = –x +1

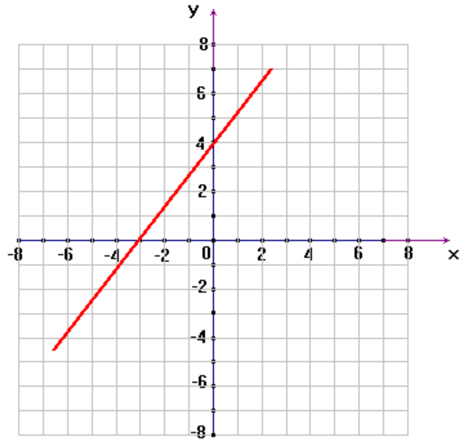
Tabela de Valores

x	f(x) = – x + 1	(x, f(x))
0	f(0) = – 0 + 1 = 1	(0,1)
–3	f(–1) = – (–3) + 1 = 4	(–3,4)



Obs.: Os valores atribuídos a x na tabela (0 e -3) são aleatórios. Se tivéssemos escolhido outros dois valores o gráfico seria o mesmo.

Exemplo 2: Dado o gráfico da função de ℝ em ℝ, escreva a função f(x) = ax + b correspondente.



<u>Resposta</u>:

Para encontrarmos a função necessitamos de dois pontos. Olhando o gráfico podemos observar que os pontos onde a reta corta os eixos x e y são fáceis de determinar sua coordenada. Assim os pontos, cujos pares ordenados são (–3,0) e (0,4), pertencem à reta.

Repare que podemos representá-los na tabela abaixo:

x	f(x) = ax + b	(x, f(x))
– 3	f(– 3) = 0	(– 3,0)
0	f(0) = 4	(0,4)

Os valores de **x** e **f(x)** estão informados na tabela, temos que encontrar os valores de **a** e **b**. Necessitamos construir um sistema de equações com duas variáveis.

Temos:

$$\begin{cases} 0 = -3a + b & (I) \\ 4 = 0a + b & (II) \end{cases}$$

De (II) tiramos que b = 4.

Substituindo o valor de b em (I) temos:

0 = – 3a + 4, ou: a = $\frac{4}{3}$

Substituindo os valores de **a** e **b** em f(x) = ax + b encontramos $f(x) = \frac{4}{3}x + 4$ que é a função do gráfico. Não esqueçam que a partir da função, podemos encontrar qualquer valor da função, ou seja: qualquer ponto sobre a reta da função.

Exemplo 3: Construa, num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico da função: $f(x) = \begin{cases} 2, & se\ x \geq 0 \\ x + 2, & se\ x < 0 \end{cases}$

Resposta:

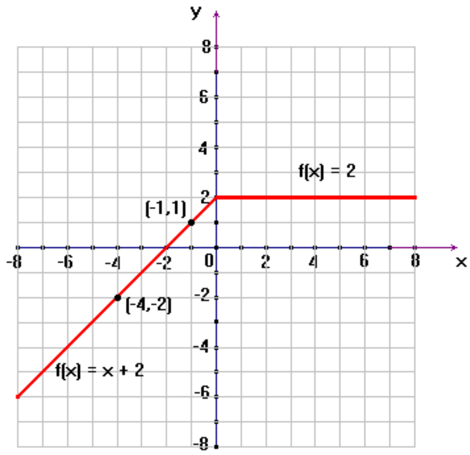
Trata-se da construção do gráfico de uma função definida por mais de uma sentença. Ela se comporta de maneira diferenciada conforme seu domínio. Neste exemplo temos dois domínios: $x \geq 0$ e $x < 0$.

Temos então 2 funções: $f(x) = 2$, quando $x \geq 0$ e, $f(x) = x + 2$, quando $x < 0$.

A função $f(x) = 2$ é uma função constante (a=0), e seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto y = 2.

Para a função $f(x) = x + 2$ determinaremos dois pontos para traçarmos seu gráfico. Não esqueça dos valores possíveis do domínio ($x < 0$).

x	**f(x) = x + 2**	**(x, f(x))**
- 1	f(-1) = -1 + 2 = 1	(-1,1)
- 4	f(-4) = -4 + 2 = -2	(-4,-2)



Referências Bibliográficas

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.;MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

ZAMPIROLLO, M.J.C. de V.; SCORDAMAGLIO, M.T; CÂNDIDO S.L. **Matemática: Projeto Escola e Cidadania para Todos**. São Paulo: Editora do Brasil, 2004.

GIOVANNI, J.R.; Bonjorno J.R. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN D.; PÉRIGO R.; ALMEIDA N. de. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Atual Editora, 2005.

DANTE, L.R. **Matemática, Volume Único**. São Paulo: Editora Ática, 2008.

DUVAL, R. **Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo. Papirus, p. 11-33, 2ª ed, 2005.

PAIVA, M. **Matemática, Volume Único**. São Paulo: Editora Moderna, 2008.

D – APÊNDICES

D1 – Respostas 1ª Aula de Revisão

1ª Aula de Revisão
PARTE 1

Uma equação do 1º grau escrita na forma geral é igual a ax + b = 0 e, uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Transformando cada uma das expressões, temos:

Expressão Inicial	Forma Geral	Classificação
1) $4x+1=4+x$	$3x - 3 = 0$	Equação 1º grau
2) $x=\dfrac{6-x}{x}$	$x^2 + x - 6 = 0$	Equação 2º grau
3) $3x^2(1+x)-4=0$	$3x^3 + 3x^2 - 4 = 0$	Equação 3º grau
4) $\dfrac{x+5}{x}=3$	$2x - 5 = 0$	Equação 1º grau
5) $2x+8\langle 0$	$2x+8\langle 0$	Inequação 1º grau
6) $f(x)=5x+8$	$f(x)=5x+8$	Função 1º grau
7) x^2+3x-9	x^2+3x-9	Polinômio 2º grau
8) $10=2(4-x)$	$2x + 2 = 0$	Equação 1º grau
9) $f(x)=2x^2-4x+4$	$f(x)=2x^2-4x+4$	Função 2º grau
10) $8+6x=x^2$	$x^2 - 6x - 8 = 0$	Equação 2º grau
11) $3x^2\rangle 6+x$	$3x^2 - x + 6 > 0$	Inequação 2º grau
12) $x(2-3x)+2(x+3)=0$	$-3x^2 + 2x + 6 = 0$	Equação 2º grau
13) $5x+10$	$5x + 10$	Polinômio 1º grau
14) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{x+12}{6}$	$\dfrac{3x}{6}-\dfrac{2x}{6}=\dfrac{x+12}{6}\therefore\dfrac{x}{6}=\dfrac{x+12}{6}$	Sentença falsa

Respostas:

c) São Equações do 1º grau as equações de números: .....1, 4, e 8...........................
d) São Equações do 2º grau as equações de números: .....2, 10, e 12 ....

1ª Aula de Revisão
PARTE 2

1ª questão: Uma equação do 1º grau de variável (incógnita) x tem como forma geral a expressão **ax + b = 0**, com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$. Determine os valores de **a** e **b** para cada uma das equações abaixo:

Expressão Inicial	Forma Geral				
a) $4x+1=4+x$	3x – 3 = 0	→	a =....3.....	e	b =....- 3.....
b) $\frac{x+5}{x}=3$	2x – 5 = 0	→	a =....2	e	b =....- 5.....
c) $10=2(4-x)$	2x + 2 = 0	→	a =....2.....	e	b =......2...
d) $3x=4$	3x – 4 = 0	→	a =....3.....	e	b =....- 4 ....
e) $5(1-x)-2x=4$	7x – 1 = 0	→	a =....7.....	e	b =....- 1.....

2ª questão: Uma equação do 2º grau de variável (incógnita) x tem como forma geral a expressão $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com **a**, **b** e **c** $\in \mathbb{R}$. Determine os valores de **a, b** e **c** para cada uma das equações abaixo:

Expressão Inicial	Forma Geral			
a) $x=\frac{6-x}{x}$	$x^2 + x - 6 = 0$	a =...1...	b =...1...	c =...- 6...
b) $8+6x=x^2$	$x^2 - 6x - 8 = 0$	a =...1...	b =...- 6...	c =...- 8...
c) $x(2-3x)+2(x+3)=0$	$-3x^2 + 4x + 6 = 0$	a =...- 3...	b =...4...	c =...6...
d) $x^2+\frac{3}{2}=2$	$x^2-\frac{1}{2}=0$	a =...1...	b =...0...	c =... $-\frac{1}{2}$ ...
e) $4x(x+2)=7x-5+x$	$4x^2 + 5 = 0$	a =...4..	b =...0...	c =...5..

D2 – Respostas 2ª Aula de Revisão

Tente encontrar uma equação que permita chegar à solução, em cada uma das questões abaixo. A seguir desenvolva-a até descobrir o resultado final.

1ª questão: O triplo da idade de André mais 18 é igual a 81 anos. Qual é a idade de André ?

Fazendo André = a e também que triplo é multiplicar por 3, logo: 3a = 81, ou 3a–81=0

$3a-81=0 \therefore 3a=81 \therefore a=\frac{81}{3} \therefore a=27\,anos$

Resp.: André tem 27 anos

2ª questão: A sequóia é considerada a espécie de árvore mais alta do mundo. Se multiplicarmos por 2 a altura que uma sequóia pode atingir e adicionarmos 96 metros, obtemos 330 metros. Qual é a altura que essa árvore pode atingir ?

Fazendo Altura da sequóia = s, temos: 2s + 96 = 330, ou 2s – 234 = 0

$2s-234=0 \therefore 2s=234 \therefore s=\frac{234}{2} \therefore s=117\,metros$

Resp.: Sequóia tem 117 metros

3ª questão: A soma de dois números consecutivos é 37. Quais são esses números?

Números consecutivos = um número é sucessor do outro número

Chamando 1º número de n, o 2º número será n + 1.

Então: n + (n+1) = 37 ∴ n + n + 1 – 37 = 0 ∴ 2n – 36 = 0

$2n-36=0 \therefore 2n=36 \therefore n=\frac{36}{2} \therefore n=18$

Resp.: Números são 18 e 19

4ª questão: Um ciclista desistiu da competição ao completar $\frac{1}{4}$ do percurso total. Se ele tivesse corrido mais 2 quilômetros, teria cumprido $\frac{1}{3}$ do percurso total. Quantos quilômetros têm o percurso total ?

Chamando Percurso de p: $\frac{1}{4}p+2=\frac{1}{3}p \therefore \frac{1}{4}p-\frac{1}{3}p+2=0 \therefore \frac{3}{12}p-\frac{4}{12}p+2=0 \therefore -\frac{1}{12}p+2=0$

$-\frac{1}{12}p+2=0 \therefore -\frac{1}{12}p=-2 \therefore -p=(-2)\cdot 12 \therefore -p=-24 \therefore p=24km$

Resp.: Percurso = 24 km

<u>5ª questão</u>: Na casa de Geraldo tem um jardim de formato retangular com 38 metros de perímetro. O comprimento do jardim é 5 metros maior que sua largura. Quais são as dimensões do jardim da casa de Geraldo ?

Dados: Perímetro = 38 m

Comprimento = Largura + 5 m

C + L + C + L = 38 $\therefore$ 2C + 2L = 38

mas C = L + 5, substituindo, temos:

2(L+5) + 2L = 38 $\therefore$ 2L + 10 + 2L – 38 = 0

4L – 28 = 0 $\therefore$ L = $\frac{28}{4}$ $\therefore$ L = 7 m

C = L + 5 = 7 + 5 = 12 m

Resp.: Comprimento = 7 m e Largura = 12 m

<u>6ª questão</u>: A diferença atual entre a idade de Carlos e da Bruna é de 15 anos. Daqui a 5 anos a idade de Bruna será a metade da idade de Carlos. Quais são as idades atuais de Carlos e Bruna ?

Chamando Carlos = c e, Bruna = b

$$\begin{cases} c - b = 15 \\ b + 5 = \dfrac{c+5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} c - b = 15 & (I) \\ -c + 2b = -5 & (II) \end{cases}$$

Fazendo (I) + (II)

$$\begin{cases} c - b = 15 & (I) \\ -c + 2b = -5 & (II) \end{cases}$$

$$0c + b = 10 \qquad b = 10 \ anos$$

Como o valor de b é a idade de Bruna então concluímos que ela tem 5 anos. Substituindo b=5 na equação (I) temos:

$$c - 10 = 15 \qquad c = 15 + 10 \qquad c = 25 \ anos$$

Resp.: Carlos tem 25 anos e Bruna 10 anos