Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 10 - rango en vectores y matrices por el método de Gauss

1. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular el rango por el método de Gauss. Se realizan operaciones elementales entre filas y columnas para hacer nulos todos los términos que se encuentran debajo de la diagonal principal:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_4 \text{ y } F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_4 = F_4 + 2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_4 = F_4 - F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la cuarta fila es la segunda fila pero con el signo cambiado, por lo que es combinación lineal de la segunda fila y por tanto se puede obviar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 3 \text{ (3 líneas con al menos un coeficiente no nulo tras aplicar Gauss)}$$

$$b) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Como en el ejercicio anterior, se realizan operaciones elementales entre filas y columnas para hacer nulos todos los términos que se encuentran debajo de la diagonal principal:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 2F_1 \text{ y } F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow F'_3 = F_3 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 3$$