DUTKOWSKI, Wilfried
Bonn

Archimedische Körper - Faszination und Objekte zur Regeometrisierung des Geometrieunterrichtes

Archimedische Polyeder sind elementare und dabei schon sehr vielfältige Körper, die in der Raumgeometrie, aber auch in Kunst und Kristallographie eine wichtige Rolle spielen. Da der Erfahrungsraum der Kinder dreidimensionaler Natur ist und nicht zweidimensional, ist die Idee naheliegend, diese Körper frühzeitig im Mathematikunterricht zu thematisieren. Man kann sie schon in der Primarstufe mit entsprechenden Polygonplättchen (Klickies) bauen. Das ist ein direkter konstruktiver Weg. Dabei erhält man statische, starre Polyeder.

Die platonischen Körper sind Polyeder, die nur von einer Sorte kongruenter regelmäßiger Vielecke begrenzt sind (z.B. nur gleichseitige Dreiecke). Sie haben die größtmögliche Symmetrie. Archimedische Körper werden ebenfalls von regelmäßigen Vielecken begrenzt, die aber nicht alle die gleiche Form haben (z.B. gleichseitige Dreiecke und Quadrate) und es müssen die Umgebungen aller Ecken kongruent sein (d.h. es ist ausgeschlossen, dass an einer Ecke 3 Kanten und an einer andern Ecke 4 Kanten zusammenkommen). Die archimedischen Körper kann man auf verschiedene Weisen aus den platonischen gewinnen, was im Folgenden exemplarisch vorgestellt wird.

Abschneiden von Ecken

Die Archimedischen Polyeder können aus den platonischen durch gleichmäßiges Abschneiden an den Ecken erzeugt werden, was auch schon bei geeigneten Materialien mit Kindern in der Primarstufe durchgeführt werden kann. Dieser enaktive Zugang lässt sich mit einer dynamischen Raumgeometriesoftware (hier GeoGebra 3D) unterschiedliche Weise durchführen (Sträßer, et al, 2024). Dabei betrachtet man dann sowohl das Polygon, dass auf den verbliebenen Körperflächen entsteht als auch das Schnittflächenpolygon. Überträgt man diesen Vorgang auf ein Tetraeder (Abb. 1a), werden dreieckige Pyramiden abgeschnitten, auf den Seitenflächen bleiben Sechsecke als Restflächen (Abb. 1b). Werden die Kanten jeweils gedrittelt, sind die Seiten der Sechsecke und der Dreiecke gleichlang, es entstehen regelmäßige Flächen und damit ein archimedischer Körper, der Tetraederstumpf genannt wird (Abb. 1c). Dieses virtuelle Vorgehen soll im Anschluss an eine manuelle Erfahrung erfolgen, die z.B. mit Hilfe eines Heißschneiders an Polystyrolwürfeln angeleitet durchgeführt wird. Durch die Verbindung der handwerklichen Durchführung mit der virtuellen Simulation wird im Wechselspiel die notwendige Orthogonalität der Schnittebenen deutlich, und das Ziehen am Schieberegler wird zu einer enaktiven Tätigkeit (Lambert, 2015).

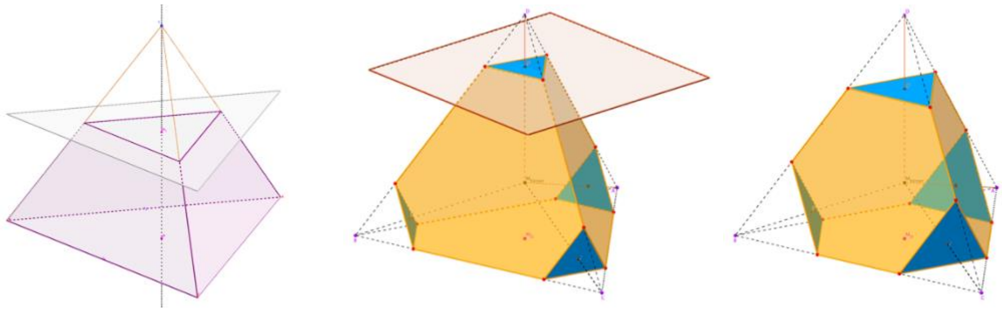

Abb. 1 a, b, c: Abschneiden einer Ecke eines Tetraeders mit einer Schnittebene

Startobjekt Würfel

Als nächstes betrachten wir Würfel und Oktaeder. Beim Würfel erhält man in einem speziellen Fall einen Körper, der (Abb. 2a, b), aus Achtecken und regelmäßigen Dreiecken bzw. im anderen Fall aus Quadraten und regelmäßigen Dreiecken besteht. Während in der rechten Abb. 2b klar ist, dass alle Kanten gleichlang sind, ist das in der linken Abb. 2a nicht ganz so offensichtlich. Es ist ein Achteck gesucht, dessen Seiten genau so lang sind wie die Seiten des regelmäßigen Dreiecks, und man kann die passende Länge algebraisch mit einem Gleichungssystem ermitteln, bzw. elementargeometrisch konstruieren.

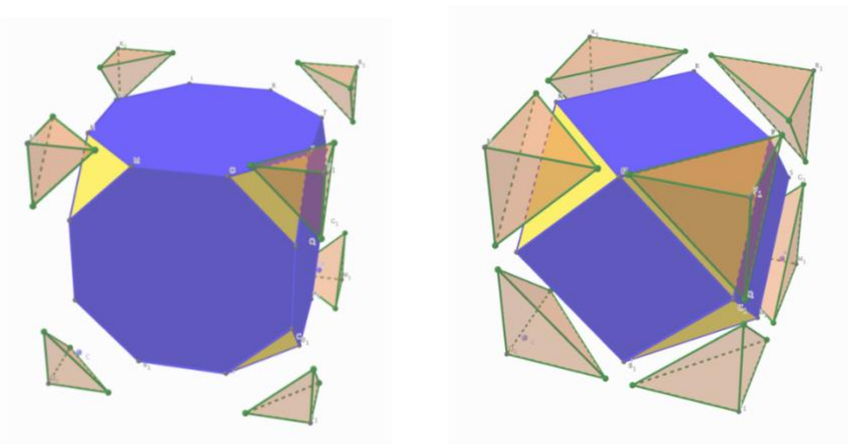

Abb. 2 a, b: Sukzessives Abschneiden von Würfelecken:

Würfelstumpf und Kuboktaeder als archimedische Körper

Der Würfelcharakter ist in Abb. 2a noch erkennbar, aber die Ecken sind stumpf, was den Namen Hexaederstumpf erklärt.

Startet man den entsprechenden Prozess mit einem Oktaeder, so erhält man zunächst einen Oktaederstumpf und dann ein Kuboktaeder (Abb. 3a, b).

Betrachtet man die Abbildungen 2a und 3a, ist jeweils noch erkennbar, dass die Abbildung 2a gestaltheoretisch zum Würfel, und die Abbildung 3a zum Oktaeder ergänzt werden kann.

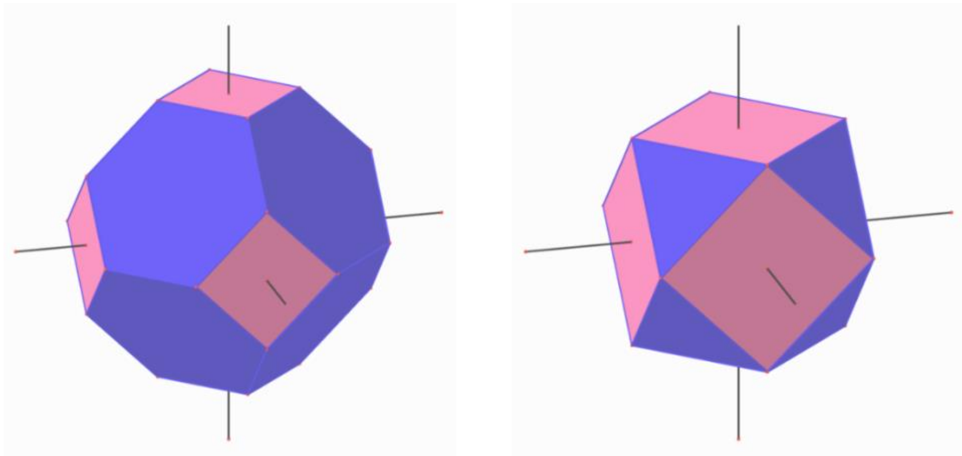

Abb. 3 a, b: Beim Abstumpfen eines Oktaeders entstehen Oktaederstumpf und Kuboktaeder als archimedische Körper

Dualität ausnutzen

Eine Besonderheit der platonischen Körper sind die zugehörigen Dualkörper. Darunter versteht man einen inneren Körper, der einen anderen Körper auf den Mittelpunkten der Seitenflächen mit seinen Ecken berührt. Ein Würfel (8 Ecken und 6 Flächen) und ein Oktaeder (6 Ecken und 8 Flächen) sind z.B. zueinander dual, während das o.g. Tetraeder zu sich selbst dual ist, weil Ecken- und Flächenanzahl gleichgroß ist. Mit Hilfe von 3D-DGS kann man nun noch eine weitere Methode betrachten, wie man dynamisch zu Archimedischen Körpern kommt, hier beispielhaft zum Kuboktaeder.

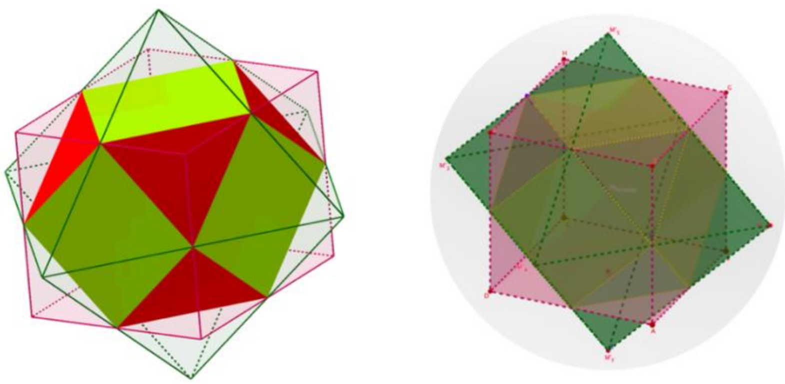

Abb. 4: Durchdringung dualer Körper

Dabei wird dann das zum Würfel duale Oktaeder so vergrößert, dass beide Körper die gleiche Umkugel haben. Bei der Durchdringung entsteht bei der gegenseitigen Halbierung der Kanten von Würfel und Oktaeder der

Durchschnittskörper der zueinander dualen Körper Hexaeder und Oktaeder, das sogenannte Kuboktaeder (Abb. 4).

Didaktische Diskussion

Aus den vorherigen Abschnitten ist ersichtlich, dass mit Hilfe einer 3D-DGS das Raumverständnis, unter Einbeziehung und Fortführung haptischer Erfahrungserlebnisse, gefördert werden kann und soll. Enaktive und ikonische Prinzipien stehen im Fokus und werden durch den Computer dynamisch unterstützt. Hierbei ist zu betonen, dass der Begriff enaktiv nicht nur auf die manuelle haptische Bearbeitung im dreidimensionalen Raum bezogen ist, sondern auch virtuell, als dynamischer Zugmodus, der die beobachtbare Veränderung steuert (Lambert, 2015). Damit wird das C-E-I-S - Modell (Elschenbroich, Dutkowski 2023) erfüllt, bei dem im Rahmen der didaktischen Vielfalt der Computer den enaktiven-ikonischen Zugang unterstützt.

Fazit

Mit dynamischer Raumgeometrie wie GeoGebra 3D lassen sich sowohl platonische Körper als auch archimedische Körper dynamisch konstruieren. Die Durchführung kann in folgenden Stufen erfolgen:

- Klickies und Netze
- Reales Abschneiden an geeigneten Modellen
- Dynamisches Abschneiden
- Durchdringungen bei dualen Körpern

Dabei werden beim gleichmäßigen dynamischen Abstumpfen aus (virtuellen) Platonischen Körpern neue Körper erzeugt. Das Raumverständnis aus der kindlichen Erfahrungswelt wird aufgenommen, attraktiv vertieft und anschlussfähig ausgebaut, was als Beitrag zur Re-Geometrisierung des Mathematikunterrichtes angesehen werden kann.

Literatur

Dutkowski, W. (2025): Archimedische Körper. GeoGebra Book https://www.geogebra.org/m/gf4eezng

Elschenbroich, H.-J. & Dutkowski, W (2023): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer - heute und vor 25 Jahren. In: MNU -Journal 05/2023 und 01/2024

Lambert, A. (2015): Was soll das bedeuten? Enaktiv - ikonisch - symbolisch. In: Filler, A. & Ludwig, M.: Vernetzung und Anwendung im Geometrieunterricht. Franzbecker

Sträßer, R.; Elschenbroich, H.-J.; Lürßen, P.: Raumgeometrisches Konstruieren von Polyedern - ein Besuch im Software Zoo. In: Der Mathematikunterricht, Heft 02/2024.