

Límite de una Función: Definición de límite

Idea principal del recurso educativo digital: Abordar la definición formal de límite con la explicación geométrica.

Propósito de aprendizaje del recurso educativo digital: Comprender la definición del límite de una función desde su tratamiento geométrico.

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Introducción</p> <p>Para hacer uso del recurso el docente debe realizar un recuento de temas tales como: solución de límites, tratamiento de funciones a trozo, análisis de valores en tablas y análisis gráfico de funciones.</p>	<p>El recurso cuenta con dos pantallas:</p> <ul style="list-style-type: none"> En la pantalla de la derecha, donde se encuentran los elementos que el docente puede modificar. Primero si desea que la función sea a trozos o no. <div data-bbox="604 602 1075 656" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $\text{¿}f(x)\text{ es a trozos?}$ <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No </div> <p>En el caso que la respuesta a esta pregunta sea "Sí", se mostrarán las casillas de entrada correspondientes para ingresar la función a trozos con las restricciones respectivas, al igual que el valor al que tenderá el límite.</p> <div data-bbox="604 865 1075 1045" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>¿Cuántos trozos tiene $f(x)$? Dos Tres Cuatro</p> <p>$f(x) =$ <input type="text"/> sii? <input type="text"/> $\leq x \leq ?$ <input type="text"/> sii? <input type="text"/> $\leq x \leq ?$</p> <p>Límite de $f(x)$ cuando x tiende a <input type="text"/></p> </div> <ul style="list-style-type: none"> Al terminar de ingresar la función, esta se graficará en la ventana de la izquierda. <div data-bbox="646 1117 987 1507" style="text-align: center;"> </div> 	<p>Dentro del recurso se encuentran los siguientes elementos interactivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> Casillas de control: para seleccionar una se debe hacer clic sobre el cuadro blanco que se encuentra a la izquierda de la palabra, a la casilla seleccionada se le mostrará así: <input checked="" type="checkbox"/>. <div data-bbox="1310 643 1818 696" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $\text{¿}f(x)\text{ es a trozos?}$ <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No </div> Botones: determinan la cantidad de trozos que se desea tenga la función, cada vez que el docente seleccione alguna opción deberá ingresar los trozos correspondientes de la función. <div data-bbox="1394 846 1772 915" style="text-align: center; margin: 10px 0;"> Dos Tres Cuatro </div> Casillas de entrada: se ingresan tanto las funciones como las restricciones necesarias/solicitadas. Esta función se graficará en ventana de la izquierda <div data-bbox="1325 1036 1839 1122" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $f(x) =$ <input type="text"/> sii? <input type="text"/> $\leq x \leq ?$ <input type="text"/> sii? <input type="text"/> $\leq x \leq ?$ <input type="text"/> sii? <input type="text"/> $\leq x \leq ?$ </div> Botones siguiente y anterior: con dichos botones permitirán aumentar o disminuir el valor de delta δ. <div data-bbox="1444 1211 1703 1325" style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 5px;">←</div> <div style="font-size: 2em; margin: 0 5px;">δ</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 5px;">→</div> </div> <p style="margin: 0;">1.7</p> </div> Botón de reiniciar: al seleccionar dicho botón, aparecerá la pantalla principal del recurso digital. <div data-bbox="1451 1409 1696 1507" style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px 20px; display: inline-block;">Reiniciar</div> </div>

Al iniciar el uso del recurso el docente debe elegir la función con la que iniciará la explicación: puede ser o no a trozos.

Se le recomienda al docente iniciar con una función lineal o cuadrática para que los estudiantes comprendan la temática a tratar. Para este caso el docente debe seleccionar la opción "No" a la pregunta que se le hace. Posteriormente debe ingresar la función y el punto al cual tiende el límite, la cual se graficará en la ventana de la izquierda, marcando el punto al cual tiende el límite y las circunferencias correspondientes al épsilon (Circunferencia roja) y delta (circunferencia azul) de la definición formal del límite. El docente debe aclarar que a medida que el delta aumenta la épsilon también aumenta para que el límite exista; de lo contrario el límite no existe. Para lograr esto las circunferencias son quienes indican la relación puesto que:

- El límite existe siempre y cuando:
 - Las dos circunferencias aumenten o disminuyan su tamaño al mismo tiempo.
 - Cuando el punto al que tiende el límite sea 0 y su imagen sea 0 , es decir $(0,0)$, solo se mostrará una circunferencia.
- El límite no existe cuando:
 - Una circunferencia aumente su tamaño mientras la otra lo disminuya

Para iniciar a utilizar el recurso el docente debe elegir si la función es a trozos o no.

Ejemplo:

¿f(x) es a trozos? Si No

Cuando el docente seleccione esta opción, aparecerá la siguiente pantalla

¿f(x) es a trozos? Si No

f(x)= ?

Límite de f(x) cuando x tiende a ?

¿Existe el lim ??
x→?

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

 δ

Iniciar

Posterior a esto el docente debe ingresar la función y el punto al cual tiende el límite en las siguientes casillas

f(x)= ?

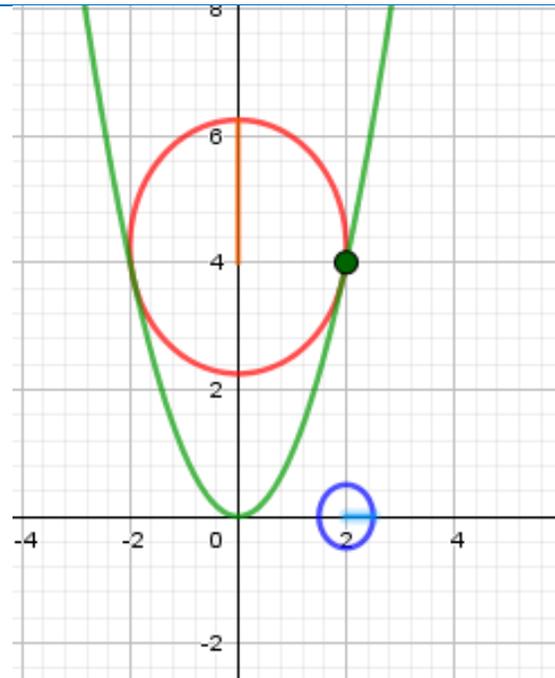
Límite de f(x) cuando x tiende a ?

Con dichos valores registrados en la ventana de la izquierda se graficará la función escrita, el punto al cual tiende el límite, la circunferencia del épsilon (roja) y la del delta (azul).

Cada vez que el docente decida si la definición la desea enseñar con una función es o no a trozos deberá llenar las casillas correspondientes a las funciones y al punto el cual tiende el límite. Finalmente, modificar el valor del δ con la ayuda de los botones destinados para esto.

- o Únicamente una circunferencia aumente o disminuya su tamaño mientras la otra no se modifique.
- o Cuando en el proceso de aumentar/disminuir alguna de las circunferencias desaparezca.

Cuando el docente desee puede hacer la misma explicación con funciones a trozos, para localizar fácilmente límites que no existan; para esto el docente puede elegir la cantidad de trozos de la función que desee que tenga (se le recomienda al docente que inicie de manera progresiva, iniciando por función de dos trozos, luego tres y finalizar con una función de cuatro trozos). Cuando el docente elija los trozos, debe ingresar las funciones, los intervalos correspondientes que desee que se grafiquen y el valor al cual tiende el límite e iniciar a aumentar y disminuir el delta para la explicación.



Conclusión o desenlace

Si se puede encontrar un número delta δ muy cercano al valor al cual tiende el límite, que permita verificar la existencia de un ϵ (relación con las circunferencias), entonces el límite existe, de lo contrario no existirá.