# 2. 2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

## Ορισμός

**Ονομάζουμε εξίσωση 2ου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα που έχει την μορφή $αx^2+βx+γ=0$ με $α\neq 0$ (ο x είναι ο άγνωστος της εξίσωσης, οι α, β είναι οι συντελεστές του δευτεροβάθμιου και του πρωτοβάθμιου όρου αντίστοιχα και ο β είναι ο σταθερός όρος).**

Στην παραπάνω εξίσωση αν $β\neq 0$ και $γ\neq 0$ , τότε $αx^2+βx+γ=0$ και λέμε ότι έχουμε την πλήρη μορφή της εξίσωσης π. χ $4x^2+5x+6=0$ .
Στην περίπτωση που έχουμε ,$γ=0$ και $β\neq 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση γράφεται $αx^2+βx=0$ και λέμε ότι έχουμε ελλιπή μορφή (λείπει ο σταθερός όρος) π. χ $2x^2+3x=0$ .

Στην περίπτωση που έχουμε $β=0$ και $γ\neq 0$ η δευτεροβάθμια εξίσωση γράφεται $αx^2+γ=0$ και λέμε ότι έχουμε ελλιπή μορφή (λείπει ο πρωτοβάθμιος όρος) π. χ $3x^3-9=0$ .

## Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Η επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης γίνεται ως εξής κατά περίπτωση:

- Όταν έχει την μορφή $αx^2+βx=0$

| | |
|---|---|
| $αx^2+βx=0$ | Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x στο πρώτο μέλος. |
| $x(αx+β)=0$ | Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α.β=0 , τότε α=0 ή β=0. |
| $x=0$ η $αx+β=0$ | Επιλύουμε κάθε μια από τις δύο πρωτοβάθμιες εξισώσεις. |
| $x=0$ η $αx=-β$ | |
| $x=0$ η $x=-\frac{β}{α}$ | |

- Όταν έχει την μορφή $αx^2+γ=0$

## 1$^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ

$$\alpha x^2 + \gamma = 0$$

$$\alpha x^2 = -\gamma$$

$$x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

Με την προϋπόθεση ότι $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ εφαρμόζουμε τον ορισμό

$x^2 = \alpha$ τοτε $x = \pm\sqrt{\alpha}$ .

## 2$^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ

Ανάλογα με την περίπτωση προσπαθούμε να εφαρμόσουμε διαφορά τετραγώνων π. χ $3x^2 - 27 = 0$ , $3(x^2 - 9) = 0$ ,$3(x+3)(x-3) = 0$ οπότε $x = \pm 3$

- Όταν έχει την μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

## 1$^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ

Αναλύουμε το τριώνυμο σε γινόμενο κατά τα γνωστά π. χ η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$ γίνεται

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1 \text{ η } x = 2$$

Έχουμε α + β= - 3 και α.β=2 και με δοκιμές α = -1 και β=-2.

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α.β=0 , τότε α = 0 ή β = 0.

Επιλύουμε κάθε μια από τις δύο πρωτοβάθμιες εξισώσεις.

## 2$^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ

***ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ***

Έστω η εξίσωση $x^2+x=12$ τότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + x = 12$$

$$4x^2 + 4.x = 4.12$$

$$(2x)^2 + 2.2x.1 + 1^2 = 48 + 1^2$$

$$(2x+1)^2 = 49 \rightarrow 2x + 1 = 7 \text{ ή } 2x + 1 = -7$$

$$2x = 6 \text{ ή } 2x = -8 \rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -4$$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του $x^2$ . Εδώ είναι 4 α=4.1=4

Στο πρώτο μέλος δημιουργούμε την παράσταση $\alpha^2+2\alpha\beta$

Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\beta^2$ που εδώ είναι $\beta^2=1^2$.
Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

## *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ*

**1.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες .

**α)** Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

**β)** Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = 0$.

**γ)** Οι λύσεις της εξίσωσης $(x–2)(x + 1) = 0$ είναι $x = 2$ και $x = -1$.

**δ)** Η εξίσωση $x^2 = 16$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = 4$.

**ε)** Η εξίσωση $x^2 = -9$ δεν έχει λύση.

**στ)** Η εξίσωση $(x–2)^2 = 0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x = 2$ .

## *ΑΠΑΝΤΗΣΗ*

Η α είναι λάθος (Λ) γιατί αν βάλουμε στην θέση του x στην εξίσωση το 0 θα έχουμε $0^2$-4.0+3=3≠0.

Η β είναι σωστή (Σ) γιατί αν βάλουμε στην θέση του x στην εξίσωση το 3 θα έχουμε $3^2 - 4.3. + 3 = 9-12+3=0$ δηλαδή την επαληθεύει.

Η γ είναι σωστή (Σ) γιατί χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α.β=0 , τότε α = 0 ή β = 0 οπότε η εξίσωση δίνει τις εξισώσεις x-2=0 ή x+1=0 οι οποίες έχουν λύση x=2 ή x=-1 αντίστοιχα. Η δ είναι λάθος (Λ) γιατί η εξίσωση εκτός από το 4 έχει λύση και το -4 $(-4)^2=16$.

Η ε είναι σωστή (Σ) γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο να μας δίνει -9.

Η στ είναι σωστή (Σ) γιατί η εξίσωση $(x–2)^2 = 0$ γίνεται (x-2)(x-2)=0 οπότε x-2=0 ή x-2=0 επομένως x=2 ή x=2 δηλαδή έχει διπλή λύση τον αριθμό x = 2.

**2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες .

**α)** Η εξίσωση $5x - 6 = x^2$ είναι 2ου βαθμού.

**β)** Η εξίσωση $x^2 + 3\square + 8 = x(x + 2)$ είναι 2ου βαθμού.

**γ)** Η εξίσωση $(λ - 2)x^2 + 5x + 3 = 0$ είναι

i ) 1ου βαθμού , όταν λ = 2 .

i i ) 2ου βαθμού , όταν λ ≠ 2.

## *ΑΠΑΝΤΗΣΗ*

Η α είναι σωστή (Σ) γιατί αν φέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος ,δηλαδή $-x^2+5x - 6 = 0$ είναι της μορφής $αx^2+βx+γ = 0$ με α≠0.

Η β είναι λάθος (Λ) γιατί αν κάνουμε πράξεις και φέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος $x^2 + 3x + 8 = x(x + 2) \to x^2 + 3x + 8 = x^2+2x \to$ $x^2 + 3x + 8-x^2-2x =0 \to x+8=0$ ,δηλαδή είναι πρώτου βαθμού.

Η γ είναι σωστή (Σ) γιατί για λ=2 γίνεται $(2 - 2)x^2 + 5x + 3 = 0 \to 5x+3=0$

Ενώ αν $\lambda \neq 2$ είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.οπότε είναι σωστή(Σ).

**3.** Ένας μαθητής λύνοντας την εξίσωση $x^2 = 6x$ απλοποίησε με το x και βρήκε ότι έχει μοναδική λύση την $x = 6$. Παρατηρώντας όμως την εξίσωση διαπίστωσε ότι επαληθεύεται και για $x = 0$. Πού έγινε το λάθος και χάθηκε η λύση $x = 0$;

***ΑΠΑΝΤΗΣΗ***

Η εξίσωση $x^2 = 6x$ γίνεται $x^2 - 6x = 0 \to x(x-6)=0 \to x=0$ ή $x=6$ άρα το λάθος έγινε στην απλοποίηση και χάθηκε η ρίζα.

## ***ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ***

*ΑΣΚΗΣΗ 1*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $(x-4)(x+1) = 0$ **β)** $y(y+5) = 0$ **γ)** $(3-\omega)(2\omega+1) = 0$

**δ)** $7x(x-7) = 0$ **ε)** $3y\left(\frac{y}{3}-2\right) = 0$ **στ)** $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1) = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x-4=0$ ή $x+1=0$

$x = 4$ ή $x = -1$

**β)** $y = 0$ ή $y+5 = 0$

$y = 0$ ή $y = -5$

**γ)** $3-\omega = 0$ ή $2\omega+1 = 0$

$\omega = 3$ ή $\omega = -\frac{1}{2}$

**δ)** $7x(x-7) = 0 \to 7x = 0$ ή $x - 7 = 0$

$x = 0$ ή $x = 7$

**ε)** $3y\left(\frac{y}{3}-2\right) = 0 \to y = 0$ ή $\frac{y}{3} - 2 = 0$

$y = 0$ ή $\frac{y}{3} = 2 \to y = 0$ ή $y = 6$

**στ)** $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1) = 0 \to \frac{1}{2} - \omega = 0$ ή

$2\omega - 1 = 0 \to \omega = \frac{1}{2}$ διπλή λύση

α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta = 0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta = 0$.

β) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta = 0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta = 0$.

γ) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha.\beta = 0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta = 0$.

δ) Ομοίως

ε) Ομοίως

στ) Ομοίως

*ΑΣΚΗΣΗ 2*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $x^2 = 7x$ **β)** $-y^2 = 9y$ **γ)** $2\omega^2 - 72 = 0$

**δ)** $-2t^2 - 18 = 0$ **ε)** $-0,2\varphi^2 + 3,2 = 0$ **στ)** $\frac{z^2}{6} - 0,5z = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x^2 = 7x \rightarrow x^2 - 7x = 0$

$x(x-7) = 0 \rightarrow x = 0$ ή $x-7 = 0$

$x = 0$ ή $x = 7$

**β)** $-y^2 = 9y \rightarrow -y^2 - 9y = 0$

$-y(y+9) = 0 \rightarrow -y = 0$ ή $y+9 = 0$

$y = 0$ ή $y = -9$

**γ)** $2\omega^2 - 72 = 0 \rightarrow 2(\omega^2 - 36) = 0$

$\omega^2 - 36 = 0$

$\omega = \sqrt{36} = 6$ ή $\omega = -\sqrt{36} = -6$

**δ)** $-2t^2 - 18 = 0 \rightarrow -2(t^2 + 9) = 0$

$t^2 + 9 = 0$ ή $t^2 = -9$

**ε)** $-0,2\varphi^2 + 3,2 = 0 \rightarrow -0,2\varphi^2 = -3,2$

$\varphi^2 = \frac{-3,2}{-0,2} = 16$

$\varphi = \sqrt{16} = 4$ ή $\varphi = -\sqrt{16} = -4$

**στ)** $\frac{z^2}{6} - 0,5z = 0$

$6\cdot\frac{z^2}{6} - 6\cdot 0,5z = 0.6 \rightarrow z^2 - 3z = 0$

$z(z-3) = 0 \rightarrow z = 0$ ή $z = 3$

α) Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Αναλύουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο παραγόντων. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

β) Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Αναλύουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο παραγόντων. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

γ) Αναλύουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο παραγόντων. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

δ) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

ε) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα όταν α είναι θετικός , η εξίσωση $x^2=\alpha$ έχει δύο λύσεις , τις $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$

στ) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Αναλύουμε το πρώτο μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

*ΑΣΚΗΣΗ 3*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $(2x-1)^2 - 1 = 0$ **β)** $3(x+2)^2 = 12$ **γ)** $(x+1)^2 = 2x$

**δ)** $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$ **ε)** $(3x - 1)^2 - 4x^2 = 0$ **στ)** $\left(x+\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $(2x-1)^2 - 1 = 0$

$[(2x-1)-1][(2x-1)+1] = 0$

$(2x-2)\cdot 2x = 0 \rightarrow 4x(x-1) = 0$

α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

$x = 0$ ή $x = 1$

**β)** $3(x+2)^2 = 12 \to (x+2)^2 = \frac{12}{3} = 4$

$x + 2 = \sqrt{4} = 2$ άρα $x = 2-2 = 0$ ή

$x + 2 = -\sqrt{4} = -2$ άρα $x = -2-2 = -4$

**γ)** $(x+1)^2 = 2x \to x^2+2x+1 = 2x$

$x^2 + 1 = 2x-2x = 0 \to x^2 = -1$ **αδύνατη**

**δ)** $\frac{(x-9)^2}{3} = 27 \to 3\cdot\frac{(x-9)^2}{3} = 3\cdot 27$

$(x-9)^2 = 81 \to x^2-18x+81 = 81$

$x(x-18) = 81-81 = 0 \to x = 0$ ή $x = 18$

**ε)** $(3x-1)^2 - 4x^2 = 0$

$(3x-1)^2 - (2x)^2 = 0$

$(3x-1-2x)(3x-1+2x) = 0$

$(x-1)(5x-1) = 0 \to x = 1$ ή $x = \frac{1}{5}$

**στ)** $\left(x+\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0$

$x^2 + 2\sqrt{3}x + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0$

$x^2 + 2\sqrt{3}x = 0$

$x\left(x+2\sqrt{3}\right) = 0 \to x = 0$ ή $x = -2\sqrt{3}$

β) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας

γ) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας

δ) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών

Αναπτύσσουμε το διώνυμο

Μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος όλους του όρους.

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

Επειδή προκύπτει ελλιπής μορφή κάνουμε παραγοντοποίηση βγάζοντας κοινό παράγοντα.

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

ε) Δημιουργούμε την διαφορά τετραγώνων. Χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη ταυτότητα και τέλος Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

στ) Αναπτύσσουμε το διώνυμο. Μεταφέρουμε στο πρώτο μέλος όλους του όρους. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. Επειδή προκύπτει ελλιπής μορφή κάνουμε παραγοντοποίηση βγάζοντας κοινό παράγοντα. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

*ΑΣΚΗΣΗ 4*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $(3x+1)^2 = 5(3x+1)$ **β)** $0{,}5(1-y)^2 = 18$ **γ)** $(2\omega^2+1)(\omega^2-16) = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $(3x+1)^2 = 5(3x+1)$

$(3x+1)^2 - 5(3x+1) = 0$

$(3x+1)(3x+1-5) = 0$

$(3x+1)(3x-4) = 0$

$3x+1 = 0$ άρα $x = -\frac{1}{3}$ ή $3x-4 = 0$ άρα $x = \frac{4}{3}$

**β)** $0{,}5(1-y)^2 = 18$

$2\cdot 0{,}5(1-y)^2 = 2\cdot 18 \to (y-1)^2 = 36$

$y-1 = 6$ άρα $y = 6+1 = 7$ ή $y-1 = -6$

α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

β) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

άρα y = -6+1= -5

**γ)** $(2\omega^2 + 1)(\omega^2 - 16) = 0$

$2\omega^2 + 1 = 0$ ή $\omega^2 - 16 = 0$

$\omega^2 = 16$

$\omega = \sqrt{16} = 4$ ή $\omega = -\sqrt{16} = -4$

γ) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

*ΑΣΚΗΣΗ 5*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $x(x - 4) = -4$ **β)** $y^2 + y - 12 = 0$ **γ)** $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

**δ)** $2t^2 - 7t + 6 = 0$ **ε)** $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi$ **στ)** $5z^2 - 3z - 8 = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x(x-4) = -4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow$

$x^2 - 2.2x + 2^2 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

**β)** $y^2 + y - 12 = 0 \rightarrow 4y^2 + 4y - 48 = 0 \rightarrow$

$4y^2 + 4y = 48 \rightarrow (2y)^2 + 2.2y = 48 \rightarrow$

$(2y)^2 + 2.2y.1 + 1^2 = 48 + 1 \rightarrow$

$(2y+1)^2 = 49 \rightarrow 2y + 1 = 7$ ή $2y + 1 = -7$

$2y = 6$ ή $2y = -8 \rightarrow y = 3$ ή $y = -4$

**γ)** $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0 \rightarrow 4\omega^2 - 2\omega.4 - 60 = 0$

$(2\omega)^2 - 2.2\omega.2 + 2^2 = 60 + 2^2 \rightarrow$

$= (2\omega - 2)^2 = 64 \rightarrow 2\omega - 2 = 8$ ή

$2\omega - 2 = -8 \rightarrow 2\omega = 10$ ή $2\omega = -6 \rightarrow$

$\omega = 5$ ή $\omega = -3$

**δ)** $2t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow$

$4.2.2t^2 - 4.2.7t + 4.2.6 = 0 \rightarrow$

$(4t)^2 - 2.4t.7 + 7^2 = -48 + 7^2 \rightarrow$

$(4t-7)^2 = 1 \rightarrow 4t - 7 = 1$ ή $4t - 7 = -1, t = 2$ ή $t = \frac{3}{2}$

α) Κάνουμε τις πράξεις Προκύπτει ανάπτυγμα τετραγώνου.
Έχει **διπλή** λύση το 2.
β) Εδώ χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, δηλαδή:
Πολλαπλασιάζουμε τους όρους της εξίσωσης με το 4α, όπου α ο συντελεστής του $x^2$ δηλαδή το α=1.
Μεταφέρουμε στο δεύτερο μέλος το σταθερό όρο και στο πρώτο μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2+2\alpha\beta$ ή $\alpha^2-2\alpha\beta$.
Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\beta^2$.
Χρησιμοποιούμε μία από τις ταυτότητες
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ή $(\alpha-\beta)^2 = =\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
γ) Ομοίως χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου α=1 , 4α= 4.
δ) Ομοίως χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου α=2 , 4α =4.2.

**ε)** $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi \rightarrow 3\varphi^2 - 4\varphi + 1 = 0 \rightarrow$

$4.3.3\varphi^2 - 4.3.4\varphi + 4.3.1 = 0 \rightarrow$

$(6\varphi)^2 - 2.6\varphi.4 + 4^2 = -12 + 4^2 \rightarrow$

$(6\varphi - 4)^2 = 4 \rightarrow 6\varphi - 4 = 2$ ή $6\varphi - 4 = -2$

$\varphi = 1$ ή $\varphi = \frac{1}{3}$

**στ)** $5z^2 - 3z - 8 = 0 \rightarrow 4.5.5z^2 - 4.5.3z - 4.5.8 = 0 \rightarrow$

$(10z)^2 - 2.10z.3 + 3^2 = 160 + 3^2 \rightarrow$

$(10z - 3)^2 = 169 \rightarrow 10z - 3 = 13$ ή $10z - 3 = -13 \rightarrow$

$z = \frac{8}{5}$ ή $z = -1$

ε) Ομοίως χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου α=3, 4α= 4.3.

στ) Ομοίως χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου α=5 , 4α =4.5.

*ΑΣΚΗΣΗ 6*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $25x^2 + 10x + 1 = 0$ **β)** $y^2(y-2) + 4y(y-2) + 4y - 8 = 0$

**γ)** $\omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $25x^2 + 10x + 1 = 0 \rightarrow (5x)^2 + 2.5x.1 + 1^2 = 0 \rightarrow$

$(5x + 1)^2 = 0 \rightarrow 5x + 1 = 0 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$ διπλ

**β)** $y^2(y-2) + 4y(y-2) + 4y - 8 = 0 \rightarrow$

$y^2(y-2) + 4y(y-2) + 4(y-2) = 0 \rightarrow$

$(y-2)(y^2 + 4y + 4) = 0 \rightarrow$

$(y-2)(y^2 + 2.2.y + 2^2) = 0 \rightarrow$

$(y-2)(y+2) = 0 \rightarrow y - 2 = 0$ ή $y + 2 = 0$

$y = 2$ ή $y = -2$(διπλή λύση)

**γ)** $\omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0 \rightarrow$

$\omega^2 + 2006\omega - 2006 - 1 = 0 \rightarrow$

$(\omega + 1)(\omega - 1) + 2006(\omega - 1) = 0 \rightarrow$

$(\omega - 1)(\omega + 1 + 2006) = 0 \rightarrow$

$\omega - 1 = 0$ ή $\omega + 1 + 2006 = 0 \rightarrow \omega = 1$ ή $\omega = -2007$

α) Παρατηρούμε ότι η παράσταση του πρώτου μέλους είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και σύμφωνα με την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ επιλύουμε την πρωτοβάθμια εξίσωση που προκύπτει. Η λύση που βρίσκουμε είναι διπλή.

β) Βγάζουμε κοινό παράγοντα από τους δύο τελευταίους όρους το 4 και προκύπτει κοινός παράγοντας το y-2 από όλους. Στην δεύτερη παρένθεση η παράσταση είναι ανάπτυγμα τετραγώνου και τέλος Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

γ) Γράφουμε το -2007=-2006-1 για να βγάλουμε κοινό παράγοντα. Και κατόπιν Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

*ΑΣΚΗΣΗ 7*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ **β)** $x^2 - (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \to$

$x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0 \to$

$x(x-\alpha) - \beta(x-\alpha) = 0 \to$

$(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \to x - \alpha = 0$ ή $x - \beta = 0 \to x = \alpha$ ή $x = \beta$

**β)** $x^2 - (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0 \to$

$x^2 - \sqrt{3}x + x - \sqrt{3} = 0 \to x(x+1) - \sqrt{3}(x+1) = 0 \to$

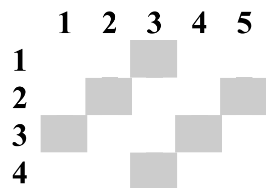
$(x+1)(x-\sqrt{3}) = 0 \to x + 1 = 0$ ή $x - \sqrt{3} = 0$

$x = -1$ ή $x = \sqrt{3}$

α) Κάνουμε τις πράξεις . Βγάζουμε κοινό παράγοντα με ομαδοποίηση των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων όρων της παράστασης και κατόπιν Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.
β) Ομοίως με το πρώτο ερώτημα.

*ΑΣΚΗΣΗ 8*

Να συμπληρώσετε το αριθμοσταυρόλεξο



**Οριζόντια:**

1. Μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $x^2=12x$.-Ρίζα της εξίσωσης $x^2+225=30x$
2. Γινόμενο ριζών της εξίσωσης $x(x+4)+8(x+4)=0$.
3. Άθροισμα ριζών της εξίσωσης $x^2-10x+9=0$.
4. Η απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών της εξίσωσης $x^2=25$ -Η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2=32x$.

**Κάθετα:**

1. Ρίζα της εξίσωσης $x^2-20x+100=0$.
2. Το ακέραιο πηλίκο των ριζών της εξίσωσης $x(x-15)=x-15$.
3. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $(x-5)^2-(x-5)=0$.
4. Μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^2-144=0$.
5. Ρίζα της εξίσωσης $x^2(x-12)+2007(x-12)=0$.

*ΛΥΣΗ*

**ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ**

$1.\ x^2 = 12x \to x^2 - 12x = 0 \to$

$x(x-12) = 0 \to x = 0 \text{ ή } x - 12 = 0 \to$

$x = 0 \text{ ή } x = 12$

$2.\ x(x+4) + 8(x+4) = 0 \to$

$(x+4)(x+8) = 0 \to x+4 = 0 \text{ ή } x+8 = 0$

$x_1 = -4 \text{ ή } x_2 = -8 \to x_1.x_2 = (-4)(-8) = 32$

$3.\ \ x^2 - 10x + 9 = 0 \to$

$4.x^2 - 4.10x + 4.9 = 0 \to$

$(2x)^2 - 2.2x.10 + 10^2 = -36 + 10^2$

$(2x-10)^2 = 64 \to 2x - 10 = 8 \text{ ή } 2x - 10 = -8$

$2x = 18 \text{ ή } 2x = 2 \to x_1 = 9 \text{ ή } x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = 9 + 1 = 10$

$4.\ x^2 = 25 \to x = \pm\sqrt{25} \to x = \pm 5$

$|x_1.x_2| = |5.(-5)| = |-25| = 25$

$x^2 = 32x \to x^2 - 32x = 0 \to x(x-32) = 0$

$x = 0 \text{ ή } x = 32$

1) Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

2) Βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0. Κατόπιν βρίσκουμε το γινόμενο των ριζών

3) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου και βρίσκουμε τις ρίζες. Κατόπιν βρίσκουμε το άθροισμα των ριζών

4. Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας. Κατόπιν παίρνουμε την απόλυτη τιμή του γινομένου των ριζών.- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

**ΚΑΘΕΤΑ**

$1.\ x^2 - 20x + 100 = 0 \to x^2 - 2.10x + 10^2 = 0$

$(x-10)^2 = 0 \to x - 10 = 0 \to x = 10$

$2.\ x(x-15) = x - 15 \to x(x-15) - (x-15) = 0$

$(x-15)(x-1) = 0 \to x - 15 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \to$

$x_1 = 15 \text{ ή } x_2 = 1 \text{ οπότε } \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{15}{1} = 15$

$3.\ (x-5)^2 - (x-5) = 0 \to (x-5)(x-5-1) = 0$

$(x-5)(x-6) = 0 \to x - 5 = 0 \text{ ή } x - 6 = 0 \to$

$x_1 = 5 \text{ ή } x_2 = 6 \to x_1.x_2 = 5.6 = 30$

1.Στο πρώτο μέλος η παράσταση είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

2. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.
Κατόπιν βρίσκουμε το πηλίκο των ριζών

Στο πρώτο μέλος βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.
Κατόπιν βρίσκουμε το γινόμενο των ριζών.

4. $x^2 - 144 = 0 \to x^2 = 144 \to x = \pm\sqrt{144}$
$x = \pm 12 \to x = 12$
5. $x^2(x-12) + 2007(x-12) = 0 \to$
$(x-12)(x^2+2007) = 0 \to x - 12 = 0$ ή
$x^2 = -2007$ αδύνατη
$\to x = 12$

4. Μεταφέρουμε στο δεύτερο μέρος τον ακέραιο και χρησιμοποιούμε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας. Η θετική ρίζα είναι το 12.

5. Στο πρώτο μέλος βγάζουμε κοινό παράγοντα και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα
α. β = 0 τότε α=0 ή β = 0.

Μετά τις παραπάνω εργασίες συμπληρώνουμε τον πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | | 1 | 5 |
| 2 | 0 | | 3 | 2 | |
| 3 | | 1 | 0 | | 1 |
| 4 | 2 | 5 | | 3 | 2 |

## *Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου*

### *Τύπος λύσεων εξίσωσης δευτέρου βαθμού*

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ .Για να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης αυτής όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιούμε την μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου .Εδώ θα εφαρμόσουμε την μέθοδο αυτή στην γενική της μορφή και θα βρούμε έναν τύπο με την βοήθεια του οποίου θα μπορούμε να λύσουμε κάθε τέτοια εξίσωση(αν έχει λύσεις).

Εφαρμόζοντας την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου έχουμε διαδοχικά

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του $x^2$ .

$4\alpha.\alpha x^2+4\alpha\beta x+4\alpha\gamma=0$

Μεταφέρουμε στο δεύτερο μέλος το σταθερό όρο

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma$

Στο πρώτο μέλος δημιουργούμε την παράσταση $\alpha^2+2\alpha\beta$

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x.\beta=-4\alpha\gamma$

Για να συμπληρωθεί το ανάπτυγμα τετραγώνου προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\beta^2$

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x.\beta+\beta^2=-4\alpha\gamma+\beta^2$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

Ορίζουμε το **$\Delta=\beta^2$-4αγ** ως **Διακρίνουσα**

Εξετάζουμε περιπτώσεις για το Δ

Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε

$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\Delta}$

**ΤΥΠΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ**

$2\alpha x=-\beta\pm\Delta\rightarrow x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

έχει δύο ανισες λύσεις

**Αν Δ=0 Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα**

Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$ τότε

$2\alpha x+\beta=0$

$2\alpha x=-\beta\rightarrow x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ έχει μία διπλή λύση

**Αν Δ<0 Η εξίσωση είναι αδύνατη**

Αν $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ τότε

η εξίσωση $2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\Delta}$ δεν έχει λύση

Άρα είναι αδύνατη

## *ΤΥΠΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ*

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ δίνονται από τον τύπο:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{με } \beta^2-4\alpha\gamma>0$$

Η παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης και συμβολίζεται με Δ δηλαδή $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ **.**

**Συμπεραίνουμε ότι:**

- Αν $\Delta>0$ η εξίσωση **δύο άνισες λύσεις** τις : $\begin{cases} x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \\ x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \end{cases}$
- Αν $\Delta=0$ η εξίσωση **έχει μία λύση** την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ (διπλή ρίζα).
- Αν $\Delta<0$ η εξίσωση δεν έχει λύση είναι δηλαδή **αδύνατη.**

## *Παραγοντοποίηση τριωνύμου*

Αν $\rho_1$, $\rho_2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}$$

Αν η λύση είναι διπλή , δηλαδή $\rho_1=\rho_2=\rho$ τότε $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2}$

Για παράδειγμα , η εξίσωση $4x^2-17x+15=0$ έχει λύσεις τις $\rho_1=3$ και $\rho_2=\dfrac{5}{4}$

Άρα το τριώνυμο $4x^2-17x+15$ γράφεται:

$$4x^2-17x+15=4(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)$$

## *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ*

**1.** Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε να αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) τη σωστή απάντηση από τη στήλη (Β).

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| **α.** $\Delta > 0$ | **1.** Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση |
| **β.** $\Delta = 0$ | **2.** Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις. |
| **γ.** $\Delta \geq 0$ | **3.** Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση. |
| **δ.** $\Delta < 0$ | **4.** Η εξίσωση δεν έχει λύση. |

| | |
|---|---|
| **α** | 2 |
| **β** | 3 |
| **γ** | 1 |
| **δ** | 4 |

**2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

**α)** Αν μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση.

**β)** Αν μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν, τότε έχει μία τουλάχιστον λύση.

**γ)** Η εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$ έχει ως λύσεις τους αριθμούς 1 και $-3$, τότε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$ γράφεται $2x^2 + 4x - 6 = (x-1)(x+3)$.

### *ΑΠΑΝΤΗΣΗ*

α) Είναι λάθος (Λ) , γιατί όταν έχει διακρίνουσα θετική τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

β) Είναι σωστή (Σ) ,γιατί όταν έχει διακρίνουσα θετική ή μηδέν τότε αν η διακρίνουσα είναι μηδέν έχει μια λύση ή αν η διακρίνουσα είναι θετική τότε έχει δύο άνισες λύσεις άρα σε κάθε περίπτωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

γ) Είναι λάθος (Λ), γιατί το τριώνυμο γράφεται σύμφωνα με την $\alpha x^2+\beta x+\gamma= \alpha(x-\rho)^2$ δηλαδή $2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)(x+3)$.

**3.** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι προτιμότερο να λυθούν με τη βοήθεια του τύπου

**α)** $2x^2 = 7x$ **β)** $3x^2 - 2x + 8 = 0$ **γ)** $-2x^2 + 50 = 0$ **δ)** $5x^2 + x - 4 = 0$.

### *ΑΠΑΝΤΗΣΗ*

Η β και η δ, γιατί η α και η γ είναι ελλιπείς μορφές δευτεροβάθμιας και λύνονται με παραγοντοποίηση.

## *ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ*

*ΑΣΚΗΣΗ 1*

Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες στήλες του πίνακα .

| **Εξίσωση** | $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ | **α** | **β** | **γ** |
|---|---|---|---|---|
| $x\ (x - 1) = -2$ | | | | |
| $3x^2 + 4 = 2\ (x + 2)$ | | | | |
| $(x - 1)^2 = 2\ (x^2 - x)$ | | | | |

*ΛΥΣΗ*

$x(x-1) = -2 \rightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$3x^2 + 4 = 2x + 4 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0$

$(x-1)^2 = 2(x^2 - x) \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x \rightarrow -x^2 + 1 = 0$

| **Εξίσωση** | $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ | **α** | **β** | **γ** |
|---|---|---|---|---|
| $x\ (x - 1) = -2$ | $x^2 - x + 2 = 0$ | 1 | –1 | 2 |
| $3x^2 + 4 = 2\ (x + 2)$ | $3x^2 - 2x = 0$ | 3 | –2 | 0 |
| $(x - 1)^2 = 2\ (x^2 - x)$ | $-x^2 + 0x + 1 = 0$ | -1 | 0 | 1 |

*ΑΣΚΗΣΗ 2*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $x^2 - x - 2 = 0$ **β)** $4y^2 + 3y - 1 = 0$ **γ)** $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

**δ)** $2z^2 - 3z + 1 = 0$ **ε)** $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ **στ)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

**ζ)** $3x^2 + 18x + 27 = 0$ **η)** $x^2 - 4x = 5$ **θ)** $x^2 - 3x + 7 = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x^2 - x - 2 = 0$

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -1$ και $\gamma = -2$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1(-2) = 1 + 8 = 9$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ τις:

$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ , ή $x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

**β)** $4y^2 + 3y - 1 = 0$

Είναι $\alpha = 4$ , $\beta = +3$ και $\gamma = -1$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4\cdot 4(-1) = 9 + 16 = 25$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $y = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-3 \pm 25}{8} = \dfrac{-3 \pm 5}{8}$ τις:

$y_1 = \dfrac{-3+5}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ ή $y_2 = \dfrac{-3-5}{8} = \dfrac{-8}{8} = -1$

**γ)** $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$

Είναι $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 6$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 6 = 1+48 = 49$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $\omega = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{-4} = \dfrac{-1 \pm 7}{-4}$ τις:

$\omega_1 = \dfrac{-1+7}{-4} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$ ή $\omega_2 = \dfrac{-1-7}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

**δ)** $2z^2 - 3z + 1 = 0$

Είναι $\alpha = 2$, $\beta = -3$ και $\gamma = 1$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9-8 = 1$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $z = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$ τις :

$z_1 = \dfrac{3+1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ ή $z_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

**ε)** $-25t^2 + 10t - 1 = 0$

Είναι $\alpha = -25$, $\beta = 10$ και $\gamma = -1$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4\cdot(-25)\cdot(-1) = 100-100 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $t = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{10}{-50} = -\dfrac{1}{5}$

**στ)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Είναι $\alpha = 4$, $\beta = -12$ και $\gamma = 9$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 144-144 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-12}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

**ζ)** $3x^2 + 18x + 27 = 0$

Είναι $\alpha = 3$, $\beta = 18$ και $\gamma = 27$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 18^2 - 4\cdot 3\cdot 27 = 324-324 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{18}{6} = -3$

**η)** $x^2 - 4x = 5$ ή $x^2 - 4x - 5 = 0$

Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = -5$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16+20 = 36$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$ ή

$x_1 = \dfrac{4+6}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ ή $x_2 = \dfrac{4-6}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

**θ)** $x^2 - 3x + 7 = 0$

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -3$ και $\gamma = 7$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot7 = 9 - 28 = -19$

Η εξίσωση είναι **αδύνατη** .

*ΑΣΚΗΣΗ 3*

Να λύσετε τις εξισώσεις **α)** $x^2 - 7x = 0$ **β)** $x^2 - 16 = 0$

**i)** με τη βοήθεια του τύπου. **ii)** Με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

*ΛΥΣΗ*

**i)** με τη βοήθεια του τύπου.

**α)** $x^2 - 7x = 0$

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -7$ και $\gamma = 0$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\cdot1\cdot0 = 49 - 0 = 49$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{7 \pm 7}{2}$ ‘η :

$x_1 = \dfrac{7+7}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ ή $x_2 = \dfrac{7-7}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

**β)** $x^2 - 16 = 0$

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ και $\gamma = -16$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4\cdot1\cdot(-16) = 0 + 64 = 64$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{0 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{\pm 8}{2}$ ή

$x = \dfrac{8}{2} = 4$ ή $x = \dfrac{-8}{2} = -4$

**ii)** Με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.

**α)** $x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$ και έχουμε :

$x = 0$ ή $x - 7 = 0$ δηλ. $x = 7$

**β)** $x^2 - 16 = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0$ και έχουμε :

$x - 4 = 0$ ή $x + 4 = 0$

$x = 4$ ή $x = -4$

*ΑΣΚΗΣΗ 4*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$ **β)** $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5(2y + 3)$

**γ)** $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$ **δ)** $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $3x^2 - 2(x - 1) = 2x + 1$

$3x^2 - 2x + 2 - 2x - 1 = 0$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

Είναι $\alpha = 3$ , $\beta = -4$ και $\gamma = 1$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 16 - 12 = 4$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6}$ ή

$x = \dfrac{4+2}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ ή $x = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

**β)** $(y + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5\,(2y + 3)$

$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 2y + 1 = 10y + 15$

$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 2y + 1 - 10y - 15 = 0$

$2y^2 - 8y - 10 = 0$

Είναι $\alpha = 2$ , $\beta = -8$ και $\gamma = -10$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4\cdot 2\cdot(-10) = 64 + 80 = 144$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $y = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{144}}{4} = \dfrac{8 \pm 12}{4}$ ή :

$y_1 = \dfrac{8+12}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$ ή $y_2 = \dfrac{8-12}{4}\dfrac{-4}{4} = -1$

**γ)** $(2\omega - 3)^2 - (\omega - 2)^2 = 2\omega^2 - 11$

$4\omega^2 - 12\omega + 9 - (\omega^2 - 4\omega + 4) - 2\omega^2 + 11 = 0$

$4\omega^2 - 12\omega + 9 - \omega^2 + 4\omega - 4 - 2\omega^2 + 11 = 0$

$\omega^2 - 8\omega + 16 = 0$

$(\omega - 4)^2 = 0$

$\omega - 4 = 0$ ή $\omega = 4$ διπλή λύση.

**δ)** $\varphi(8 - \varphi) - (3\varphi + 1)(\varphi + 2) = 1$

$8\varphi - \varphi^2 - (3\varphi^2 + 6\varphi + \varphi + 2) = 1$

$8\varphi - \varphi^2 - 3\varphi^2 - 6\varphi - \varphi - 2 - 1 = 0$

$-4\varphi^2 + \varphi - 3 = 0$

Είναι $\alpha = -4$ , $\beta = 1$ και $\gamma = -3$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-3) = 1 - 48 = -47$

Η εξίσωση είναι **αδύνατη** .

*ΑΣΚΗΣΗ 5*

Να λύσετε τις εξισώσεις

**α)** $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$ **β)** $\frac{y^2}{3}-\frac{6y+1}{4}=\frac{y-2}{6}-2$

**γ)** $0{,}5t^2 - 0{,}4(t+2) = 0{,}7(t-2)$ **δ)** $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega-7)=-\sqrt{3}$

*ΛΥΣΗ*

**α)** Επειδή το Ε.Κ.Π. είναι το 15 έχουμε :

$15\frac{x^2-1}{3}-15\frac{x+3}{5}=15(x-2)$

$5(x^2-1) - 3(x+3) = 15x - 30$

$5x^2 - 5 - 3x - 9 - 15x + 30 = 0$

$5x^2 - 18x + 16 = 0$

Είναι $\alpha = 5$ , $\beta = -18$ και $\gamma = 16$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-18)^2 - 4\cdot5\cdot16 =$
$= 324 - 320 = 4$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-18)\pm\sqrt{4}}{10} = \frac{18\pm2}{10}$ ή :

$x_1 = \frac{18-2}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ ή $x_2 = \frac{18+2}{10} = \frac{20}{10} = 2$

**β)** Επειδή το Ε.Κ.Π. είναι το 12 έχουμε :

$12\cdot\frac{y^2}{3} - 12\frac{6y+1}{4} = 12\frac{y-2}{6} - 12\cdot2$

$4y^2 - 3(6y+1) = 2(y-2) - 24$

$4y^2 - 18y - 3 = 2y - 4 - 24$

$4y^2 - 18y - 3 - 2y + 4 + 24 = 0$

$4y^2 - 20y + 25 = 0$ ή $(2y-5)^2 = 0$ ή $2y - 5 = 0$ ή $2y = 5$ ή $y = \frac{5}{2}$ (διπλή)

**γ)** Για να έχουμε ακεραίους συντελεστές πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης επί 10 και έχουμε.

$10\cdot0{,}5t^2 - 10\cdot0{,}4(t+2) = 10\cdot0{,}7(t-2)$

$5t^2 - 4(t+2) = 7(t-2)$

$5t^2 - 4t - 8 = 7t - 14$

$5t^2 - 4t - 8 - 7t + 14 = 0$

$5t^2 - 11t + 6 = 0$

Είναι $\alpha = 5$ , $\beta = -11$ και $\gamma = 6$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4\cdot5\cdot6 = 121 - 120 = 1$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $t = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-11) \pm 1}{10} = \dfrac{11 \pm 1}{10}$ ,

$t = \dfrac{11+1}{10} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$ ή $t = \dfrac{11-1}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

**δ)** Πολλαπλασιάζουμε επί 2 τα μέλη της εξίσωσης και έχουμε :

$2\cdot\dfrac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -2\cdot\sqrt{3}$

$\omega(\sqrt{3}\omega - 7) = -2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,\omega^2 - 7\omega + 2\sqrt{3} = 0$

Είναι $\alpha = \sqrt{3}$ , $\beta = -7$ , $\gamma = 2\sqrt{3}$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 49 - 24 = 25$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $\omega = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-7) \pm 5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{7 \pm 5}{2\sqrt{3}}$ άρα ,

$\omega = \dfrac{7+5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{12}{2\sqrt{3}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ ή

$\omega = \dfrac{7-5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

*ΑΣΚΗΣΗ 6*

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

**α)** $x^2 + 4x - 12$ **β)** $3y^2 - 8y + 5$ **γ)** $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

**δ)** $x^2 - 16x + 64$ **ε)** $9y^2 + 12y + 4$ **στ)** $-\omega^2 + 10\omega - 25$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $x^2 + 4x - 12$ . Επιλύουμε την εξίσωση $x^2 + 4x - 12 = 0$ .

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = 4$ , $\gamma = -12$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot1\cdot(-12) = 16 + 48 = 64$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \quad = \dfrac{-4 \pm 8}{2}$ άρα,

$x_1 = \dfrac{-4+8}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ ή $x_2 = \dfrac{-4-8}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$ .

Επομένως : $x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6)$

**β)** $3y^2 - 8y + 5$ . Επιλύουμε την εξίσωση $3y^2 - 8y + 5 = 0$ .

Είναι $\alpha = 3$ , $\beta = -8$ , $\gamma = 5$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4\cdot 3\cdot 5 = 64 - 60 = 4$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-8) \pm 2}{6} = \dfrac{8 \pm 2}{6}$ άρα ,

$y_1 = \dfrac{8+2}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ , $y_2 = \dfrac{8-2}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

Επομένως : $3y^2 - 8y + 5 = 3\cdot(y - \dfrac{5}{3})(y - 1) = (3y - 5)(y - 1)$ .

**γ)** $-2\omega^2 + 5\omega - 3$ . Επιλύουμε την εξίσωση $-2\omega^2 + 5\omega - 3 = 0$ .
Είναι $\alpha = -2$ , $\beta = 5$ , $\gamma = -3$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-3) = 25 - 24 = 1$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $\omega = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-5 \pm 1}{-4} = \dfrac{-5 \pm 1}{-4}$ άρα

$\omega_1 = \dfrac{-5+1}{-4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$ ή $\omega_2 = \dfrac{-5-1}{-4} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

Επομένως : $-2\omega^2 + 5\omega - 3 = -2(\omega - 1)(\omega + \dfrac{3}{2}) = (1 - \omega)(2\omega + 3)$ .

**δ)** $x^2 - 16x + 64$ . Επιλύουμε την εξίσωση $x^2 - 16x + 64 = 0$ .
Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -16$ , $\gamma = 64$ και
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-16)^2 - 4\cdot 1\cdot 64 = 256 - 256 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-16}{2} = 8$

Επομένως : $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$ .

**ε)** $9y^2 + 12y + 4$ . Επιλύουμε την εξίσωση $9y^2 + 12y + 4 = 0$ .
Είναι $\alpha = 9$ , $\beta = 12$ , $\gamma = 4$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4\cdot 9\cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3}$

Επομένως : $9y^2 + 12y + 4 = 9[y - (-\dfrac{2}{3})]^2 = 3^2(y + \dfrac{2}{3})^2 = (3y + 2)^2$

**στ)** $-\omega^2 + 10\omega - 25$ . Επιλύουμε την εξίσωση $-\omega^2 + 10\omega - 25 = 0$
Είναι $\alpha = -1$ , $\beta = 10$ , $\gamma = -25$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-25) =$
$100 - 100 = 0$

Η εξίσωση έχει μία ρίζα διπλή την $\omega = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{10}{-2} = 5$

Επομένως : $-\omega^2 + 10\omega - 25 = -(\omega - 5)^2$ .

*ΑΣΚΗΣΗ 7*

Αν $\alpha$, $\beta$ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση

**α)** $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$ και **β)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

*ΛΥΣΗ*

**α)** $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι : $(-1)^2 - 4\alpha(1-\alpha) = 1 - 4\alpha + 4\alpha^2 =$
$= (2\alpha - 1)^2 \geq 0$ επομένως η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση

**β)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta =$
$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ επομένως η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση .

*ΑΣΚΗΣΗ 8*

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$,όπου $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Αν η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

*ΛΥΣΗ*

Επειδή η εξίσωση $(\alpha + \gamma)x^2 - 2\beta x + (\alpha - \gamma) = 0$ έχει μία ρίζα διπλή η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι ίση με μηδέν .

Άρα $\Delta = (2\beta)^2 - 4(\alpha+\gamma)(\alpha - \gamma) = 0$ ή $4\beta^2 - 4(\alpha^2 - \gamma^2) = 0$ ή
$4\beta^2 = 4(\alpha^2 - \gamma^2)$ ή $\beta^2 = (\alpha^2 - \gamma^2)$ ή $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ ή $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο αφού για τα μήκη των πλευρών ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα .

## ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - 4 = 0$ είναι το 2, ποια είναι η άλλη ρίζα της;

***ΛΥΣΗ***

Εφόσον το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης έχουμε ότι

$2^2 + \alpha 2 - 4 = 0 \rightarrow 4 + 2\alpha - 4 = 0 \rightarrow 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0$

Άρα η εξίσωση είναι η $x^2 - 4 = 0$ οπότε $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Επομένως η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι η -2.

**2.** Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + \alpha x + 9 = 0$ αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με την εξίσωση 2x+1=0.

***ΛΥΣΗ***

Έχουμε $2x+1=0 \to 2x=-1 \to x=-\frac{1}{2}$.

Εφόσον αυτή η λύση είναι και λύση της εξίσωσης $4x^2+\alpha x+9=0$ θα έχουμε: $4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)+9=0 \to 4.\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+9=0 \to$

$1-\frac{1}{2}\alpha+9=0 \to 10=\frac{1}{2}\alpha \to \alpha=20$

Άρα η εξίσωση είναι $4x^2+20x+9=0$

Είναι $\alpha=4$, $\beta=20$, $\gamma=9$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=20^2-4\cdot4\cdot9=400-144=256$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-20\pm16}{8}$ άρα,

$x_1=\frac{-20+16}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ ή $x_2=\frac{-20-16}{8}=\frac{-36}{8}=-\frac{9}{2}$.

**3.** Η κρυμμένη φράση

| ☐ | ☻ | ♠ | ♫ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| ♪ | ♀ | ♀ | ♂ |
|---|---|---|---|
| | | | |

Για να σχηματίσετε το πρώτο μέρος της φράσης, αντικαταστήστε κάθε σύμβολο με το γράμμα της αλφαβήτου που αντιστοιχεί στον αριθμό που βρήκατε (π.χ 1→Α, 2→Β,…, 24→ Ω).

☐ Η λύση της εξίσωσης $x^2+1=2x$.

☻ Το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης $x^2-8x+7=0$.

♠ Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $(x-2)^2=25$.

♫ Η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης $x^2-17x+30=0$.

♪ Η μικρότερη λύση της εξίσωσης $2(x-8)^2=72$.

♀ Λύση της εξίσωσης μικρότερη του 5 $(x-2)^2=2x+4$

♂ Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $x^2-\frac{9}{2}x+2=0$.

***ΛΥΣΗ***

Η λύση της εξίσωσης $x^2+1=2x$ είναι:

$x^2+1=2x \to x^2-2x+1=0 \to (x-1)^2=0 \to x=1$ διπλή ρίζα

Και η αντιστοιχία του γράμματος της αλφαβήτου είναι 1→Α.

Το άθροισμα των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 8x + 7 = 0$ είναι:

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -8$ , $\gamma = 7$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4\cdot1\cdot7 = 64-28 = 36$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{8 \pm 6}{2}$ άρα,

$x_1 = \dfrac{8+6}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ ή $x_2 = \dfrac{8-6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

άρα $x_1 + x_2 = 7 + 1 = 8$ και η αντιστοιχία του γράμματος της αλφαβήτου είναι $8 \to \Theta$.

Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $(x-2)^2 = 25$ είναι:

$(x-2)^2 = 25 \to x - 2 = \pm 5 \to x = 2 \pm 5 \to x_1 = 7$ ή $x_2 = -3$ άρα η μεγαλύτερη ρίζα είναι το $7 \to$ Η.

Η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 17x + 30 = 0$ είναι:

Είναι $\alpha = 1$ , $\beta = -17$, $\gamma = 30$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4\cdot1\cdot30 = 289-120=169$

Η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{17 \pm 13}{2}$ άρα,

$x_1 = \dfrac{17+13}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$ ή $x_2 = \dfrac{17-13}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$. Επομένως η διαφορά των λύσεων της εξίσωσης είναι $15-2=13 \to$ Ν.

Η μικρότερη λύση της εξίσωσης $2(x-8)^2 = 72$ είναι:

$2(x-8)^2 = 72 \to (x-8)^2 = 36 \to x - 8 = \pm 6 \to x_1 = 14$ ή $x_2 = 2$ είναι το 2.

Λύση της εξίσωσης $(x-2)^2 = 2x + 4$ μικρότερη του 5 είναι:

$(x-2)^2 = 2x + 4 \to x^2 - 4x + 4 - 2x - 4 = 0 \to x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0 \to x = 0$ ή $x = 6$ είναι το 0

Η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $x^2 - \dfrac{9}{2}x + 2 = 0$ είναι:

$x^2 - \dfrac{9}{2}x + 2 = 0 \to 2x^2 - 9x + 4 = 0 \to x_1 = 4$ ή $x_2 = \dfrac{1}{2}$ είναι το 4.

Επομένως η κρυμμένη φράση είναι όπως φαίνεται παρακάτω ΑΘΗΝΑ 2004

| □ | ☻ | ♠ | ♫ | □ |
|---|---|---|---|---|
| Α | θ | Η | Ν | Α |

| ♪ | ♀ | ♀ | ♂ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 4 |