Simulazione II Prova scritta del 28/02/2019: Licei Scientifici (Soluzione dei Quesiti)

Prof. G. Forte*

a. a. 2018/2019

N. B.= Nella traccia 6 sono presenti gravi errori dimensionali[1]

1 Quesiti

Quesito 1.1 (Quesito n^o 3 della traccia originale)**.** *Una scatola contiene 16 palline numerate da* 1 *a* 16

(a) Se ne estraggono 3*, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia* 10 *e gli altri due minori di* 10*?*

(b) Se ne estraggono 5 *contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a* 13*?*

Soluzione (Collaborazione con la Prof. G. Aufiero)

(a) Noi siamo interessati alla probabilità *congiunta* $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$, dove x_1 è l'evento "*esce* 10 *alla prima estrazione*", x_2 è l'evento "*esce un numero minore di* 10 *alla seconda estrazione*" ed x_3 è l'evento "*esce un numero minore di* 10 *alla terza estrazione*".

$$\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{P}_1(x_1)\mathcal{P}_2(x_2)\mathcal{P}_3(x_3)$$

* gforte@outlook.it

[1] La formula corretta è la seguente

$$x(t) = \left(\frac{1}{27}\frac{m}{s^3}\right)t^3 + \left(\frac{2}{9}\frac{m}{s^2}\right)t^2$$

dove $\mathcal{P}_i(x_i)$ è la probabilità che si verifichi l'evento x_i. Si calcola in maniera agevole, ad esempio assumendo di *valutare*[2] le probabilità con l'approccio di Laplace, che

$$\mathcal{P}_1(x_1) = \frac{1}{16}, \qquad \mathcal{P}_2(x_2) = \mathcal{P}_2(x_3) = \frac{9}{16}$$

e dunque

$$\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3) = \frac{81}{16^3} \approx 2\%$$

In effetti il risultato ottenuto con questo approccio (nell'ipotesi in cui l'urna non sia truccata[3]) è corretto solo se valgono determinate ipotesi aggiuntive che non sono state esplicitamente fatte nella traccia (ma che tuttavia si considerano come verificate in problemi del genere). Per comprenderlo, vediamo cosa succede nel caso in cui le palline vengono estratte dalla stessa urna con reinserimento. l'ipotesi di indipendenza è giustificata solo nel caso di *mixing* (ovvero solo se l'urna, dopo il reinserimento, viene opportunamente shakerata[4]). Se così non fosse, la pallina estratta per prima avrebbe più probabilità di essere estratta di quelle che si trovano sul fondo oppure, nel caso la persona che esegua l'estrazione preferisse andare ad ispezionare il fondo, la pallina appena reinserita avrebbe meno probabilità di essere estratta delle palline che si trovano sul fondo. La cosa si accentua se l'urna è della forma tipica di quella a piramide che si usa per la tombola. In quel caso, visto la forma strozzata dell'urna è altamente probabile che esca nuovamente il numero reinserito. Dunque mixing, forma dell'urna e processo di estrazione, sono tutte informazioni che possono avvalorare l'ipotesi di indipendenza oppure screditarla. Dunque come si calcola il risultato? Possiamo davvero dire che la probabilità sia del 2%. In effetti no! Tutto ciò che potete fare, sulla base delle informazioni che avete a disposizione, è **scommettere** sul risultato appena trovato $\cdots$ "*Probability does not exist!*"[5]

(b) Il risultato si può pensare come probabilità *congiunta*

$$\mathcal{P}(E_{13}, E_{n\leq 13}) = \mathcal{P}_n(E_{n\leq 13}|E_{13})\mathcal{P}_{13}(E_{13})$$

con E_{13} l'evento "*esce 13 su un'estrazione di* 5 *palline*" ed $E_{n\leq 13}$ l'evento '*escono 4 numeri minori di 13 su un'estrazione di* 4 *palline, nell'ipotesi che il* 13 *si sia verificato*" (una pallina è fissata dal fatto che 13 *deve* uscire; $E_{n\leq 13}$ è un evento condizionato). Chiaramente $\mathcal{P}_{13}(E_{13})$ è la probabilità che si verifichi l'evento E_{13}, mentre $\mathcal{P}_n(E_{n\leq 13}|E_{13})$ è la probabilità che si verifichi l'evento $E_{n\leq 13}$

A questo punto dobbiamo fare il conto delle possibili combinazioni (non ordinate e senza ripetizione):

$$\mathcal{P}_{13}(E_{13}) = \frac{C_{15,5}}{C_{16,5}} = \frac{5}{16}$$

$$\mathcal{P}_n(E_{n\leq 13}|E_{13}) = \frac{C_{12,4}}{C_{15,4}}$$

---

[2] **Non (!!!!)** definire.

[3] Ipotesi **soggettiva**, fino a prova contraria!

[4] Ipotesi che nella traccia non c'è$\cdots$ in effetti sulla base della traccia, il problema è risolvibile solo in maniera **soggettiva**. Oppure irrisolvibile per chi non dovesse essere a suo agio con l'approccio soggettivo alla probabilità. Ricordo tuttavia fugacemente che *soggettivo*, nel contesto di teoria della probabilità, *non vuol dire arbitrario*!

[5] de Finetti, B. (1974), Theory of Probability, Vol. **I** New York: John Wiley and Sons.

da cui segue

$$\mathcal{P}(E_{13}, E_{n\leq 13}) = \frac{5}{16}\frac{C_{12,4}}{C_{15,4}} = \frac{C_{12,4}}{C_{16,5}} = \frac{12!}{8!4!}\frac{11!5!}{16!} = \frac{12!}{8!4!}\cdot\frac{8!4!\cdot 5\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16} =$$

$$= \frac{3\cdot 11\cdot 5}{13\cdot 7\cdot 16} \approx 11\% \tag{1}$$

Un approfondimento numerico

Il risultato appena ottenuto può essere anche simulato in un ambiente virtuale (ad esempio utilizzando Matlab).

L'idea è quella di costruire una matrice con N righe e 5 colonne, in maniera che ogni riga rappresenti un possibile processo di estrazione dall'urna (ripetuto N volte). Per gni processo di estrazione, dovremo poi contare il numero di righe in cui compare il 13, e **fra questa righe** (evento condizionato) andare a contare il numero di righe in cui i rimanenti numeri sono minori di 13. Per finire valutiamo la frequenza relativa dell'evento interessato e lo confrontiamo con la predizione data in Eq. (1).

L'Algoritmo 1 codifica in Matlab l'idea appena esposta ed il risultato è mostrato in Fig. 1. Chiunque fosse interessato ad approfondire l'argomento è incoraggiato a contattarmi in privato.

Algoritmo 1: Programma per la soluzione numerica dell'esercizio

```
%*****************************************************************
% Questo Script Matlab risolve numericamente il quesito 3        *
% della simulazione della seconda prova per i Licei Scientifici*
% del 28/02/2019                                                 *
%*****************************************************************

%*****************************************************************
% Autore    : G. Forte                                           *
% Release   : beta version (Marzo 2019)                          *
% Contatti  : gforte@outlook.it----http://www.giuseppeforte.me/ *
% Materiale: https://ggbm.at/ydcferpy                            *
%*****************************************************************

%*****************************************************************
% Matlab è un ambiente di lavoro non open source altamente      *
% ottimizzato per risolvere complessi problemi computazionali   *
% Puoi trovare maggiori informazioni al sito ufficiale          *
% https://it.mathworks.com/products/matlab.html                 *
%                                                                *
% Un'alternativa legale (ed open source) è Octave, che può      *
% essere scaricato al segunete indirizzo:                       *
% https://www.gnu.org/software/octave/                          *
% Per qualunque approfondimento o discussione di carattere      *
% numerico circa il programma presentato in queste note invito *
% chiunque a contattarmi in privato.
%*****************************************************************
clear all;
Repliche        = 10000;%Ripetiamo il processo di estrazione
% delle 5 palline "Repliche" volte
```

```
Probability          = zeros(length(10:10:Repliche),1);
estr = 0;
for estrazioni = 10:10:Repliche
  estr     = estr+1;
  Urna              = zeros(estrazioni,5);
  % La matrice Urna contiene su
  % ogni riga le cinque palline
  % estratte
  for ii = 1:estrazioni  % costruiamo "estrazioni" righe della
  % matrice Urna
    Urna(ii,:) = randperm(16,5);
  end
  [Riga  Colonna] = find(Urna==13); % Troviamo le righe che
  % contengono il numero 13
  Palline = Urna(Riga, :); % Costruiamo una matrice SOLO con le
  % righe di Urna che contengono il 13 (alla fine, A CONDIZIONE
  % SIA USCITO IL 13 conteremo le righe in cui tutti gli altri
  % 4 numeri sono minori di 13)

  Logical_balls    = Palline<=13; % metti 1 nella matrice Palline se
  % l'elemento di matrice è minore o uguale di 13
  N_occorrenze     = length(find(sum(Logical_balls,2)==5));
  % conta il numero di righe di Palline in cui tutti i numeri
  % sono minori ouguali di 13
  Rel_freq          = N_occorrenze./estrazioni;
  % calcola la probabilità cercata
  Probability(estr)    = Rel_freq;
  % ripeti
end

% Eseguiamo il plot dei dati
figure
yyaxis left %potrebbe non funzionare su Octave
plot(10:10:Repliche,Probability)
ylabel('Frequenza Relativa')
hold on
yyaxis right
P_exp = nchoosek(12,4)/nchoosek(16,5);
plot([10  Repliche], [P_exp  P_exp])
ylabel('P=C_{12,4}/C_{16,5}')
%
xlabel('Numero di estrazioni')
```

Quesito 1.2 (Quesito n^o 4 della traccia originale). *Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale* $y = \dfrac{s(t)}{t(x)}$, *dove* $s(x)$ *e* $t(x)$ *sono due polinomi, tale che il grafico della funzione*

(a) *incontri l'asse* x *nei punti di ascissa* -1 *e* 2 *e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto*

(b) *abbia asintoti verticali di equazioni* $x = -3$ *ed* $x = 1$;

(c) *Passi per il punto* $P(7, 10)$.

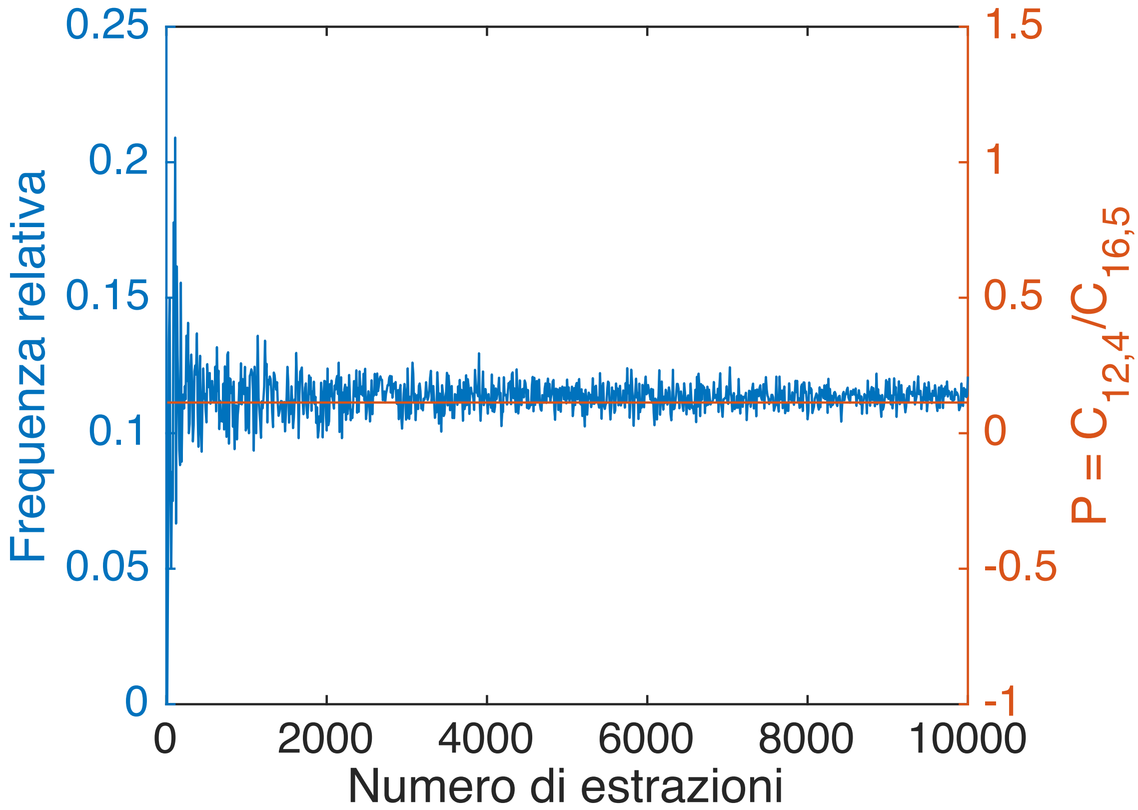


Figura 1: Frequenza relativa dell'evento considerato nella parte (b) dell'esercizio (linea blu), insieme al valore atteso calcolato nel testo (Eq. (1), linea marrone)

Soluzione (In collaborazione con la Prof. G. Aufiero)

Assumiamo che la funzione cercata sia della forma

$$y = \frac{(x+1)(x-2)(ax+b)}{(x+3)(x-1)} \tag{2}$$

Per futura convenienza calcoliamo anche la derivata della funzione in Eq. (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^4 + 4ax^3 + (3b-9a)\,x^2 + (6a-2b)\,x + 7b + 6a}{(x-1)^2\,(x+3)^2} \tag{3}$$

Senza dubbio il numeratore della funzione $y(x)$ si annulla per $x = -1$ ed $x = 2$, come richiesto. Inoltre la funzione è definita ovunque tranne che nei punti $x = -3$ ed $x = 1$, dove vi saranno due asintoti verticali, purché risulti $((a,b) \neq (1,-3)$ **e** $(a,b) \neq (1,-1))$.

Sostituiamo il punto $P(7,10)$ nella funzione proposta:

$$10 = \frac{(7+1)(7-2)(7a+b)}{(7+3)(7-1)} = \frac{2(7a+b)}{3} \qquad \rightarrow \qquad 15 = 7a + b \tag{4}$$

A questo punto valutiamo la derivata per $x = 2$ ed imponiamo che sia nulla (il coefficiente angolare della retta $y = 0$, l'asse delle x, è ovviamente nullo). Utilizzando Eq. (3) abbiamo

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{16a + 32a + 12b - 36a + 12a - 4b + 7b + 6a}{25} = \frac{6a+3b}{5} = 0 \qquad \rightarrow \qquad b = -2a$$

e dunque, ricordando Eq. (4) segue

$$15 = 7a - 2a = 5a \qquad \rightarrow \qquad a = 3$$

ovvero

$$b = -6 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x+3)(x-1)}$$

I valori di a e b determinati non sono fra quelli da scartare ($(a, b) \neq (1, -3)$ **e** $(a, b) \neq (1, -1)$) e dunque l'esercizio risulta pertanto risolto. La funzione è mostrata in Fig. 2.

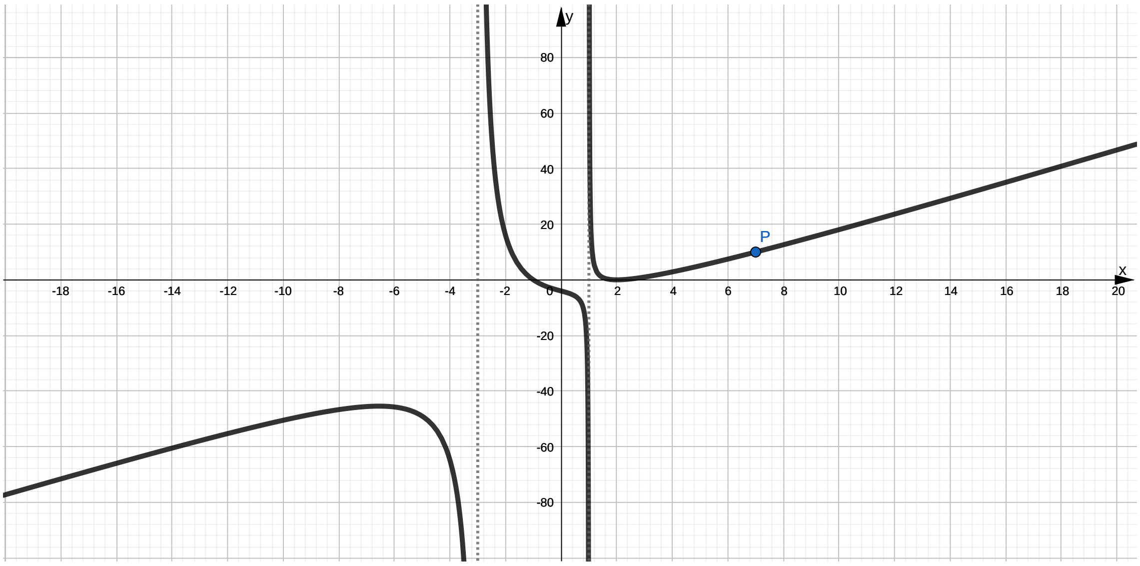


Figura 2: Grafico della funzione in Eq. (2), per $a = 3$ e $b = -6$

Quesito 1.3 (Quesito n^o 2 della traccia originale)**.** *Sia $\mathscr{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathscr{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.*

Soluzione (In collaborazione con la Prof. G. Aufiero))

La funzione assegnata è chiaramente pari ($y(x) = y(-x)$) ed il grafico non sarà altro che un esponenziale decrescente riflesso, come mostrato in Fig. 3. Il rettangolo inscritto nella figura è caratterizzato dall'area

$$\mathscr{A}(x) = 4e|x|e^{-|x|}$$

Data la parità, consideriamo solo il caso $x \geq 0$. Per trovare i punti stazionari di $\mathscr{A}$, dobbiamo annullare la derivata prima. Un attimo di riflessione convince che i punti stazionari di $\mathscr{A}$ sono identici ad i punti stazionari di $\mathscr{A}/4e$. Concentriamoci dunque sulla funzione $|x|e^{-|x|}$, ovvero per $x \geq 0$, calcoliamone la derivata ed imponiamo il tutto uguale a zero per la ricerca degli eventuali punti stazionari:

$$(1 - x)e^{-x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = x_+ = 1$$

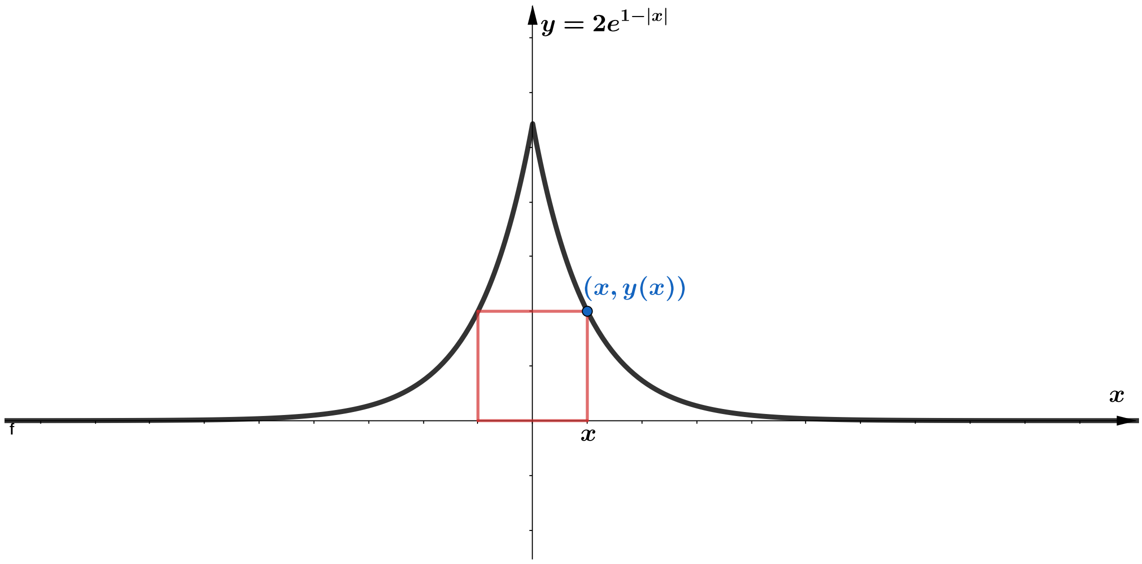


Figura 3: Grafico della funzione $y = 2e^{1-|x|}$, insieme al *rettangolo ottimale*

che si ottiene come immediata conseguenza del fatto che l'esponenziale non si annulla mai. Al punto x_+, dobbiamo aggiungere (per la simmetria) anche $x_- = -1$. Dunque nei punti $x_\pm$, la derivata prima di si annulla. Intorno ad x_+ la funzione cresce a sinistra di x_+ e decresce a destra, ovvero x_+ è un massimo. Per la simmetria, analogo risultato si ottiene analizzando la positività intorno al punto x_- (v. La soluzione del Problema 1.1 nel file dei problemi, la funzione $q(t)$ è una vicina parente della funzione assegnata in questo esercizio). Fra tutti i rettangoli inscritti in $\mathscr{R}$ con la base sull'asse delle ascisse, il particolare rettangolo di base $|x_+ - x_-| = 2$, ha area massima $\mathscr{A} = 4$ ed è un quadrato, infatti la base $|x_+ - x_-| = 2$ è congruente all'altezza $y(x_\pm) = 2$.

Il perimetro del quadrato di area massima è dato da

$$\mathscr{P}(x) = 4|x| + 4e^{1-|x|}$$

Abbiamo di nuovo una funzione pari. Per $x \geq 0$ si trova (zompando i fattori irrilevanti alla minimizzazione)

$$1 - e^{1-x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_+ = 1$$

e dunque x_+ è il punto stazionario cercato. Per simmetria lo sarà anche $x_- = -1$. Anche il segno si studia in maniera quasi immediata. Infatti abbiamo che

$$1 - e^{1-x} \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad e^{1-x} \leq e^0$$

Ricordiamo che l'esponenziale con base maggiore di uno è una funzione crescente e dunque una disequazione fra due esponenziali si traduce in una disequazione fra gli esponenti, ovvero

$$1 - x \leq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq 1$$

Dunque, intorno ad x_+, $\mathscr{P}(x)$ cresce a destra di x_+ e decresce a sinistra di x_+, ovvero x_+ è un punto di minimo. Data la parità, la stessa proprietà deve valere per x_- (provare per credere). Ne segue che il quadrato di area massima ha perimetro minimo

Quesito 1.4 (Quesito n^o 6 della traccia originale). *Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da*

$$x(t) = \left(\frac{1}{27}\frac{m}{s^3}\right) t^3 + \left(\frac{2}{9}\frac{m}{s^2}\right) t^2$$

dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

Soluzione

In un moto uniformemente accelerato la posizione varia asintoticamente nel tempo come $\sim t^2$, mentre nel caso in esame si ha un andamento asintotico $\sim t^3$. Non si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

La velocità media nei primi nove secondi di moto si calcola come

$$v_{\text{media}} = \frac{x(t = 9\ s)}{9\ s} = \frac{45m}{9s} = 5\frac{m}{s}$$

Si osservi come, **se nella traccia non vengono opportunamente dichiarate le unità di misura dei coefficienti che compaio in $x(t)$**, non si può giungere chiaramente ad un risultato. Ad esempio, supponiamo che i coefficienti siano (cosa che possiamo fare, visto che nella traccia non è specificato)

$$\frac{1}{27}\frac{m}{h^3} = \frac{1m}{27 \times (3600\ s)^3}$$

con il secondo coefficiente invariato. Possiamo fare questa ipotesi in quanto non sono specificate nella traccia le unità di misura dei coefficienti (inoltre, pur considerando i coefficienti come in quest'ultimo esempio, la **coerenza dimensionale** rimarrebbe intatta). A questo punto la velocità media nei primi 9 secondi sarebbe all'incirca

$$v_{\text{media}} \approx 2\frac{m}{s}$$

e questo spiega, speriamo, una volta per tutte, come mai le unità di misura vanno dichiarate nella maniera stabilita dall'ufficio internazionale dei pesi e delle misure (e non a bontà di "Bartleby lo scrivano").

La velocità istantanea del punto materiale in question è data da

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{1}{9}\frac{m}{s^3}\right) t^2 + \left(\frac{4}{9}\frac{m}{s^2}\right) t$$

da cui risulta

$$v(t) = 5\frac{m}{s} \qquad \rightarrow \qquad \left(1\frac{m}{s^3}\right) t^2 + \left(4\frac{m}{s^2}\right) t - 45\frac{m}{s} = 0$$

da cui, risolvendo per t otteniamo le due soluzioni

$$t_{\pm} = (-2 \pm 7)\ s$$

Scartando la soluzione negativa, perché fisicamente priva di significato, troviamo che dopo $t = 5\ s$ il punto materiale raggiunge la velocità media determinata in precedenza.

Quesito 1.5 (Quesito n^o 8 della traccia originale). *Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \sin(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato ℓ. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.*

Soluzione

In questo esercizio B_0 ha le dimensioni di un campo magnetico (si misura in Tesla (T) nel S. I.) ed ω è una grandezza con le dimensioni dell'inverso di un tempo (si misura in s^{-1} nel S. I.). La forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}$ (volt (V) nel S. I.) è data da (legge di Faraday–Neumann)

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_\ell(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\Big[B_0(2 + \sin(\omega t))\ell^2\Big] = -B_0\ell^2\omega\cos(\omega t)$$

Da cui si ricava che la corrente $i(t)$ (ampere (A) nel S. I.) è data da

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{B_0\ell^2\omega\cos(\omega t)}{R}$$

dove R si misura in Ohm (Ω nel S. I.).

Quesito 1.6 (Quesito n^o 1 della traccia originale). *Determinare i parametri a e b in maniera tale che la funzione $g : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$g(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{b}{x-3}, & x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'

Soluzione

La derivata prima della funzione vale

$$\frac{dg(x)}{dx} = \begin{cases} -2ax, & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{-b}{(x-3)^2}, & x > 1 \end{cases} \tag{6}$$

che è ben definita per ogni valore di x del suo dominio, ad eccezione dei punti $x = 3$ (dove la funzione non esiste e presenta un asintoto verticale) e del punto $x = 1$ dove la derivata destra e sinistra non coincidono, a meno che

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{x\to 1^+}\frac{dg(x)}{dx} \qquad \to \qquad -2a = \frac{-b}{4}$$

da cui ricaviamo che $b = 8a$.

A questo punto, ricordiamo che una funzione reale di **una** variabile reale ovunque derivabile nel suo dominio, risulta anche ovunque continua nel suo dominio[6]. Dunque, quando $b = 8a$, dobbiamo necessariamente avere anche che (usando Eq. (5))

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) \qquad \to \qquad 3 - a = -\frac{b}{2} \qquad \to \qquad 3a = -3$$

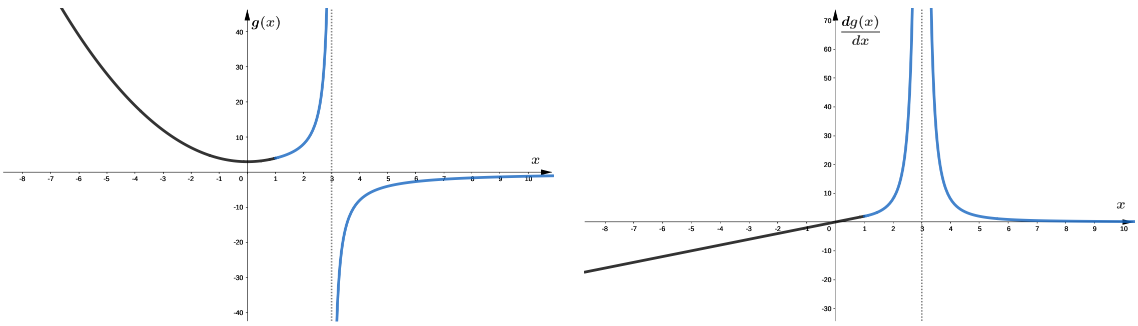
da cui si ricava in definita che $a = -1$, $b = -8$ e quindi possiamo scrivere Eq. (5) ed Eq. (6) come

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \le 1 \\ \\ \dfrac{8}{3-x}, & x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ \\ \dfrac{8}{(x-3)^2}, & x > 1 \end{cases} \tag{8}$$

Per disegnare il grafico della funzione $g(x)$, basta fare qualche considerazione, senza ricorrere a strumenti di analisi sofisticati. Il primo tratto ($x \le 1$) è una parabola ed ha un ovvio (ed unico!) minimo in $x = 0$. Per $x > 1$ il grafico di $g(x)$ è qualitativamente uguale al grafico della funzione elementare $-1/x$, traslato di 3 lungo l'asse x (v. Fig. 4a).

Per quello che riguarda il grafico della derivata, il primo tratto ($x \le 1$) è la retta passante per l'origine, di coefficiente angolare 2. Per $x > 1$, il grafico della derivata è qualitativamente uguale al grafico della funzione elementare $1/x^2$, traslato di 3 lungo l'asse delle ascisse (v. Fig. 4b)



(a) Grafico di $g(x)$ (b) Grafico di $\dfrac{dg(x)}{dx}$

Figura 4

Quesito 1.7 (Quesito n^o 5 della traccia originale). *Si consideri la superficie sferica* $\mathcal{S}$ *di equazione* $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.

(a) *Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano* Π, *di equazione* $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ *e la superficie* $\mathcal{S}$ *sono secanti*

(b) *Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando* Π *con* $\mathcal{S}$.

[6]Il viceversa, in generale, non è vero

Soluzione

(a) Completando i quadrati in x e z, la superficie può essere espressa nella forma equivalente

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10$$

da cui segue immediatamente che si tratta di una circonferenza di raggio

$$R = \sqrt{10} = 3\left(1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648} + \mathcal{O}(9^{-3})\right) \approx 3 + \frac{1}{6}$$

e centro $\mathbf{r}_0 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{k}}$.

Un vettore normale al piano assegnato è dato da $3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$, oppure, dividendo tale vettore per il suo modulo, otteniamo il versore

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{3}{7}\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{7}\hat{\mathbf{j}} + \frac{6}{7}\hat{\mathbf{k}}$$

La distanza $d(\Pi, \mathcal{S})$ fra $\mathbf{r}_0$ ed il piano Π si trova facilmente proiettando il vettore spostamento $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_\pi - \mathbf{r}_0$ lungo la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e prendendone il valore assoluto, dove $\mathbf{r}_\pi$ è un qualunque punto del piano Π, ad esempio $\mathbf{r}_\pi = -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}$. In particolare troviamo

$$d(\Pi, \mathcal{S}) = |\hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta\mathbf{r}| = \frac{14}{7} = 2 < R$$

Dunque Π ed $\mathcal{S}$ sono secanti.

(b) Il raggio ρ della circonferenza individuata dall'intersezione di Π con $\mathcal{S}$ si calcola immediata applicazione del teorema di Pitagora, ovvero

$$\rho = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}$$

Quesito 1.8 (Quesito n^o 7 della traccia originale). *Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.*

(a) Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.

(b) Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

Soluzione

(a) Nel caso di urto perfettamente elastico, sia l'energia cinetica totale che la quantità di moto totale prima e dopo l'urto si conservano. Abbiamo dunque il sistema

$$\begin{cases} m(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = 3m\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} & \text{(Cons. Energia)} \\ \\ m(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 3m\mathbf{V} & \text{(Cons. quantità di moto)} \end{cases}$$

Nel sistema di sopra abbiamo indicato con $\mathbf{v}'$ la velocità di m dopo l'urto e con $\mathbf{V}$ la velocità di $3m$ dopo l'urto. Un semplice confronto fra le equazioni del sistema precedente consente di scrivere

$$\mathbf{V} - \mathbf{v}' = \mathbf{v} \tag{9}$$

Possiamo poi legare facilmente queste tre velocità qui sopra fra di loro introducendo la velocità del centro di massa $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$, data da

$$\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{\mathbf{v}}{4} \tag{10}$$

Si osservi che la velocità del centro di massa rimane **costante** durante tutto il processo: prima, durante e dopo l'urto. Questo è dovuto al fatto che non agiscono forze esterne (le uniche in grado di variare la velocità del centro di massa) sul sistema, oltre alle forze (interne) impulsive che agiscono durante l'urto. Se indichiamo con $\mathbf{r}_{\mathrm{A}}$ ed $\mathbf{r}_{\mathrm{B}}$ le posizioni, rispettivamente della sfera m e

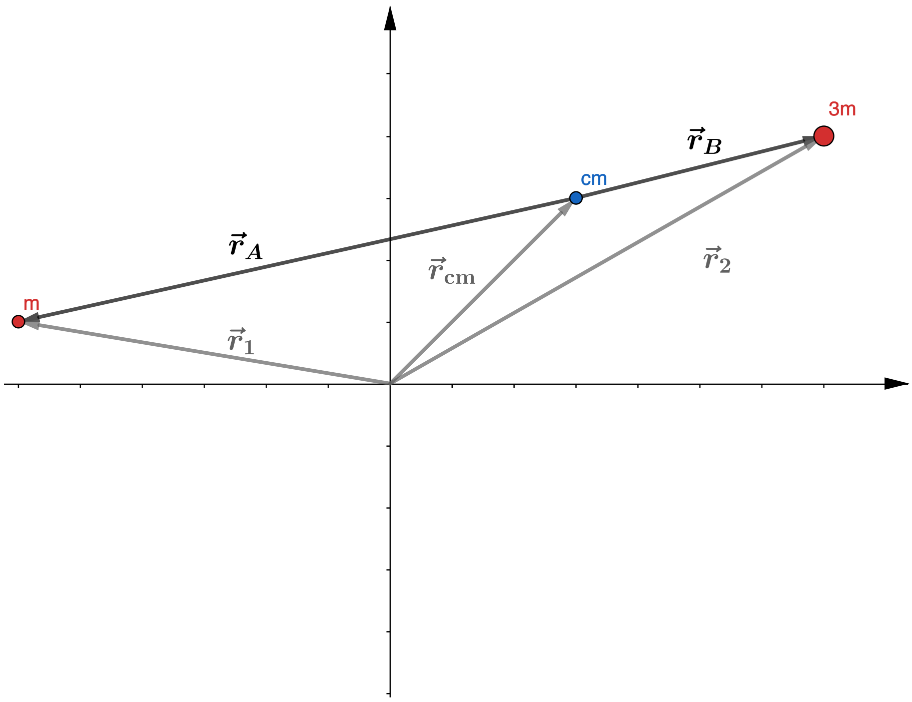


Figura 5

$3m$, nel riferimento del centro di massa (v. Fig. 5) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\mathrm{A}} &= -\frac{3}{4}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\mathrm{cm}} \\
\mathbf{r}_{\mathrm{B}} &= -\frac{1}{4}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\mathrm{cm}}
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ sono i vettori posizione (di m e $3m$ rispettivamente) nel riferimento del laboratorio. Le relazioni precedenti valgono sempre, sia prima che dopo l'urto, ad ogni istante. Derivando rispetto al tempo $\mathbf{r}_{\mathrm{A}}$ (ad esempio negli istanti successivi all'urto) otteniamo

$$-\frac{3}{4}(\mathbf{V} - \mathbf{v}') = \mathbf{v}' - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$$

ovvero, ricordando Eq. (9) ed Eq. (10) otteniamo

$$-\frac{3}{4}\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \frac{1}{4}\mathbf{v} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}' = -\frac{1}{2}\mathbf{v}$$

dunque la massa m dopo l'urto si muoverà sulla stessa direzione che aveva prima dell'urto, ma verso opposto e con velocità dimezzata. Mentre la sfera $3m$ avrà velocità

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}' = \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

(b) Nel caso di urto completamente anelastico possiamo ricorrere alla conservazione della quantità di moto totale. Indicando con $\mathbf{V}$ la velocità finale dopo l'urto abbiamo

$$m\mathbf{v} = 4m\mathbf{V} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{4}\mathbf{v}$$

e quindi dopo l'urto il sistema delle due masse si muove nella stessa direzione e verso della massa m prima dell'urto, tuttavia con velocità quattro volte inferiore alla velocità iniziale. Assumendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale sul piano del moto, l'energia meccanica totale è data dall'energia cinetica delle due sfere prima e dopo l'urto. In particolare l'energia cinetica prima dell'urto vale $E_{\mathrm{i}} = mv^2/2$, mentre l'energia finale è data da $E_{\mathrm{f}} = 2mV^2 = mv^2/8$ e quindi da cui si trova che l'energia dissipata nel processo vale

$$E_{\mathrm{f}} - E_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{3}{4}E_{\mathrm{i}}$$

ovvero il 75% dell'energia iniziale si dissipa (in calore) nel processo d'urto.