Teoría – Tema 3

Teoría - 2 - Polinomios de Taylor

¿Para qué sirve el polinomio de Taylor?

Un polinomio es una función continua en todo $\mathbb{R}$ y admite derivadas de cualquier orden (primera derivada, segunda derivada, tercera derivada,..., n-ésima derivada).

$$p(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+...+a_n x^n$$
$$a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Un polinomio es una función muy sencilla de evaluar. Para un punto x_0, el valor del polinomio en el punto es $p(x_0)$, y se obtiene aplicando operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y/o división. Por lo tanto, si funciones trigonométricas o exponenciales pueden aproximarse a través de un polinomio, esta aproximación sería muy útil, por ejemplo, para simulaciones por ordenador, para cálculos mentales rápidos en los que no dispongamos de calculadora, etc.

Esta es la filosofía que subyace a los conocidos como polinomios de Taylor, que aproximan funciones a partir de polinomios de grado n .

Sea $f(x)$ una función continua al menos en un intervalo que contiene al punto x_0, y derivable también en ese intervalo, con derivadas de todos los órdenes.

Podemos construir un polinomio de grado 1 a partir de la primera derivada de $f(x)$, de la forma:

$$p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Este polinomio evaluado en x_0 coincide con el valor de la función en el punto x_0, ya que:

$$p_1(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x_0)=f(x_0)$$

Y el polinomio tiene la misma derivada que la función en el punto x_0, ya que:

$$p_1'(x)=0+f'(x_0)=f'(x_0) \quad \rightarrow \quad p_1'(x_0)=f'(x_0)$$

La gráfica de $p_1(x)$ es una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0.

Análogamente podemos construir un polinomio de grado 2 a partir de la primera y segunda derivada de $f(x)$, de la forma:

$$p_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Nuevamente, en el punto x_0, el valor del polinomio coincide con el valor de la función.

$$p_2(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x_0-x_0)=f(x_0)$$

Este polinomio de grado dos tiene las dos primeras derivadas, evaluadas en x_0, iguales que las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ evaluadas en x_0.

$$p_2'(x_0)=f'(x_0)$$
$$p_2''(x_0)=f''(x_0)$$

Es de esperar que la gráfica de este polinomio de grado 2 se acerca “un poco más” a la gráfica de la función $f(x)$ respecto a la que obtuvimos con el polinomio de grado 1.

Generalizando, si obtenemos un polinomio de grado n llamado $p_n(x)$, su gráfica se aproximará cada vez más a $f(x)$ a medida que aumentamos el grado del polinomio. Por lo que podremos aproximar la función a este polinomio de grado n .

$$f(x)\simeq p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-x_0)^n$$

Es decir, podemos representar la gráfica de la función $f(x)$ como un polinomio de grado n si conocemos los valores de la función en un punto x_0, y si conocemos los valores de las n primeras derivadas de la función.

Cuanto mayor sea el grado del polinomio, más precisa será la aproximación, y menor será el error relativo que se comete.

Esta aproximación de cualquier función a un polinomio, que se obtiene a partir de las derivadas sucesivas de la función, es lo que se conoce como polinomio de Taylor. Sus aplicaciones son diversas, sobre todo en computación, ya que muchas veces es más eficiente para los algoritmos informáticos trabajar con las aproximaciones de Taylor que con las funciones originales.

Desarrollo en series de Taylor de funciones elementales

Apliquemos lo que hemos estudiado sobre Taylor a las siguientes funciones.

$$f(x) \simeq p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-x_0)^n$$

Logaritmo desarrollado alrededor de $x_0 = 1$

$f(x) = \ln(x)$ → función a desarrollar

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \quad , \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad , \quad f^{iv)}(x) = \frac{-6}{x^4} \quad , \quad f^{v)}(x) = \frac{24}{x^5} \quad \ldots$$

$f^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$ → derivada n-ésima

$$\ln(x) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{1}{2}\frac{-1}{1^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{2}{1^3}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}\frac{-6}{1^4}(x-1)^4 + \frac{1}{5!}\frac{24}{1^5}(x-1)^5 + \ldots$$

Si deseo aproximar, por ejemplo, el valor de $\ln(2)$ tendremos:

$$\ln(2) \approx 0 + \frac{1}{1}(2-1) + \frac{1}{2}\frac{-1}{1^2}(2-1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{2}{1^3}(2-1)^3 + \frac{1}{4!}\frac{-6}{1^4}(2-1)^4 + \frac{1}{5!}\frac{24}{1^5}(2-1)^5 + \ldots$$

Operamos:

$$\ln(2) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$$