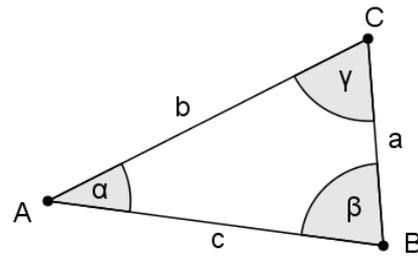


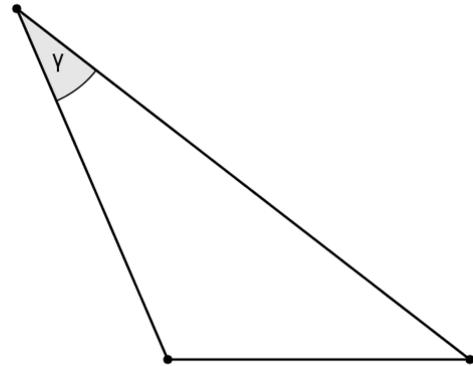
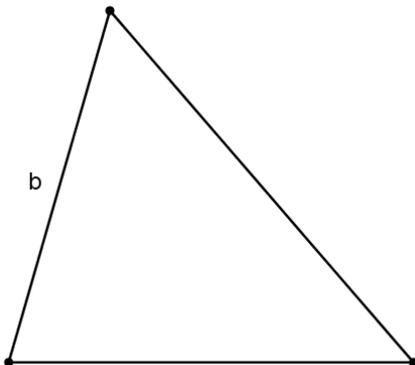
# Dreiecke – Eigenschaften und Arten

## Beschriftung von Dreiecken:

- Die **Eckpunkte** A, B, C werden gegen den Uhrzeigersinn beschriftet.
- Die **Seite** a liegt dem Eckpunkt A gegenüber.
- Der **Winkel**  $\alpha$  liegt beim Punkt A.



1. Beschrifte die gegebenen Dreiecke! Miss jeweils die Winkel und addiere sie!



Beim Messen der Winkel treten immer Ungenauigkeiten auf, die Winkelgrößen werden immer gerundet. Exakte Messungen (Rechnungen) müssten immer eine Winkelsumme von genau  $180^\circ$  ergeben.

Winkelsumme im Dreieck:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

2. Von einem Dreieck kennt man 2 Winkel. Berechne die Größe des dritten Winkels!

a.	b.	c.	d.	e.
$\alpha = 40^\circ$ $\beta = 80^\circ$	$\alpha = 35^\circ$ $\gamma = 65^\circ$	$\beta = 100^\circ$ $\gamma = 50^\circ$	$\alpha = 15^\circ$ $\gamma = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$ $\beta = 50^\circ$
$\gamma =$	$\beta =$	$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma =$

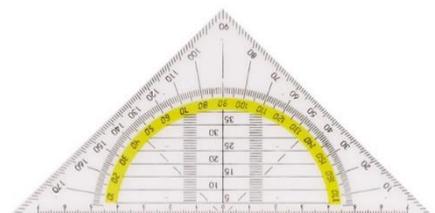
3. Kreuze an, ob die Aussagen stimmen oder nicht!

	richtig	falsch
Es gibt Dreiecke mit zwei rechten Winkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt Dreiecke mit einem stumpfen Winkel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt Dreiecke mit zwei stumpfen Winkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt Dreiecke, die nur spitze Winkel haben.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt Dreiecke mit drei gleich großen Winkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

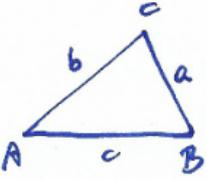
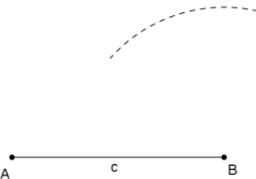
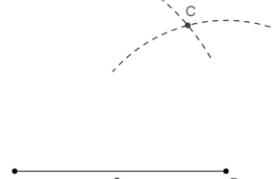
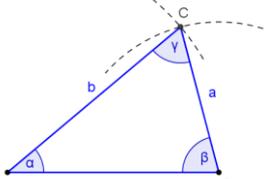
Dreiecke werden nach zwei Kriterien eingeteilt:

- **Länge der Seiten:** ungleichseitig, gleichschenkelig (2 gleich lange Seiten), gleichseitig
- **Größe der Winkel:** spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig

4. Beschreibe die Form eines Geo-Dreiecks!



## Seiten – Seiten – Seiten – Satz

WIE ?	Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem die drei Seitenlängen gegeben sind?			
				
<p>Eine beschriftete Skizze zeigt dir, wo die Seiten liegen.</p>	<p>Zeichne <math>AB = c</math> waagrecht. Nimm die Länge <math>a</math> in den Zirkel und zeichne von <math>B</math> aus einen Bogen!</p>	<p>Nimm die Länge <math>b</math> in den Zirkel und schlage von <math>A</math> aus ab. Der Schnittpunkt ist der Eckpunkt <math>C</math>.</p>	<p>Verbinde und beschrifte! Konstruktionslinien können sichtbar bleiben.</p>	

5. Dreieck:  $a = 7,5 \text{ cm}$  ;  $b = 4,3 \text{ cm}$  ;  $c = 8,3 \text{ cm}$   
 Konstruiere und beschrifte das Dreieck! Miss zur Kontrolle den Winkel  $\alpha$ ! [ $\alpha \approx 64^\circ$ ]

Die Seite  $c$  wird (wenn möglich) waagrecht gezeichnet. Wenn  $a$  oder  $b$  länger als  $c$  sind, kann das Dreieck auch nach links oder rechts geneigt sein.



6. Von einem Dreieck kennt man die drei Seitenlängen. Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! Kontrolliere mit dem GeoGebra-Applet.
- |    |  |    |  |    |  |
|----|--|----|--|----|--|
| a. | $a = 8,2 \text{ cm}$<br>$b = 9 \text{ cm}$<br>$c = 7,4 \text{ cm}$   | b. | $a = 4,6 \text{ cm}$<br>$b = 8,7 \text{ cm}$<br>$c = 6 \text{ cm}$   | c. | $a = 8,5 \text{ cm}$<br>$b = 7,8 \text{ cm}$<br>$c = 5,4 \text{ cm}$ |
| d. | $a = 4,5 \text{ cm}$<br>$b = 7,9 \text{ cm}$<br>$c = 6,3 \text{ cm}$ | e. | $a = 5,1 \text{ cm}$<br>$b = 4,8 \text{ cm}$<br>$c = 5,7 \text{ cm}$ | f. | $a = 8,8 \text{ cm}$<br>$b = 4,9 \text{ cm}$<br>$c = 6,9 \text{ cm}$ |

Nicht mit allen Seitenlängen kann man ein Dreieck konstruieren, z.B.:  $a = 3 \text{ cm}$  ,  $b = 5 \text{ cm}$  ,  $c = 10 \text{ cm}$   
 Werden die Längen mit dem Zirkel abgetragen, so treffen sich die Seiten  $a$  und  $b$  nicht.

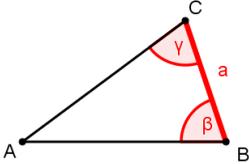
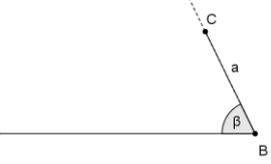
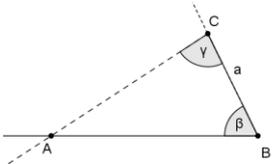
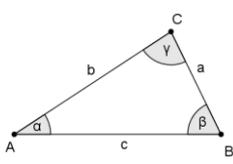
### Dreiecksungleichung:

Die beiden kürzeren Seiten zusammen müssen immer länger als die dritte Seite sein.

7. Kreuze jene Angaben an, die ein Dreieck ergeben! (Tipp: Markiere zuerst die längste Seite!)

a.	b.	c.	d.	e.
$a = 8 \text{ m}$ $b = 2 \text{ m}$ $c = 3 \text{ m}$	$a = 8 \text{ m}$ $b = 4 \text{ m}$ $c = 5 \text{ m}$	$a = 6 \text{ m}$ $b = 7 \text{ m}$ $c = 8 \text{ m}$	$a = 6 \text{ m}$ $b = 7 \text{ m}$ $c = 15 \text{ m}$	$a = 9 \text{ m}$ $b = 20 \text{ m}$ $c = 9 \text{ m}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Winkel – Seiten – Winkel – Satz

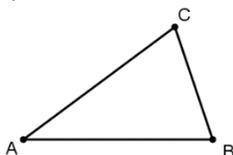
WIE ?	Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem die Seite a und die beiden angrenzenden Winkel gegeben sind? (geg.: a, $\beta$ , $\gamma$ )		
			
Eine beschriftete Skizze zeigt dir, wo die Seiten und die Winkel liegen.	Zeichne vom Punkt B aus den Winkel $\beta$ und trage die Länge der Seite a ab!	Im Punkt C wird der Winkel $\gamma$ gezeichnet, so findet man den Punkt A.	Verbinde und beschrifte! Konstruktionslinien können sichtbar bleiben.

8. Dreieck:  $a = 5,5 \text{ cm}$  ;  $\beta = 111^\circ$  ;  $\gamma = 36^\circ$   
 Konstruiere und beschrifte das Dreieck! Miss zur Kontrolle die fehlenden Seiten!  
 [  $b \approx 9,5\text{cm}$ ;  $c \approx 6,0\text{cm}$  ]

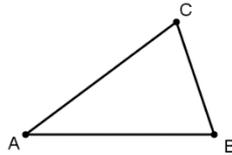


9. Von einem Dreieck kennt man eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.  
 Markiere die gegebenen Seiten und Winkel in der Skizze!  
 Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! (Achtung: Die Form kann ganz anders sein.)

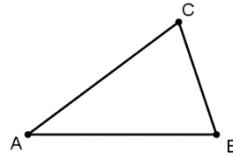
- a.  $c = 8,5 \text{ cm}$   
 $\alpha = 72^\circ$   
 $\beta = 47^\circ$



- b.  $a = 11,3 \text{ cm}$   
 $\beta = 50^\circ$   
 $\gamma = 42^\circ$



- c.  $b = 11 \text{ cm}$   
 $\alpha = 38^\circ$   
 $\gamma = 59^\circ$



Nicht immer sind die beiden an einer Seite anliegenden Winkel gegeben, aber der dritte kann immer berechnet werden, wenn er für die Konstruktion notwendig ist.

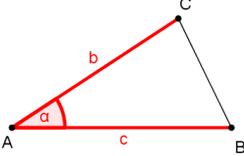
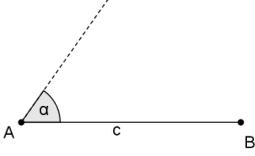
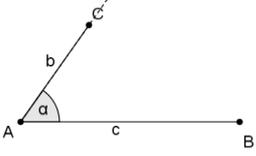
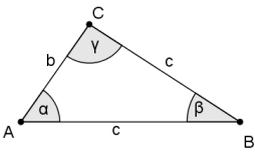
10. Von einem Dreieck kennt man eine Seite und zwei Winkel.  
 Markiere die gegebenen Seiten und Winkel in einer Skizze! Berechne den dritten Winkel!  
 Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! (Achtung: Die Form kann ganz anders sein.)

- a.  $b = 13,5 \text{ cm}$   
 $\alpha = 35^\circ$   
 $\beta = 108^\circ$

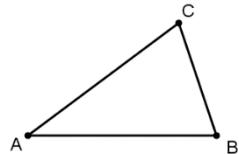
- b.  $c = 7 \text{ cm}$   
 $\beta = 38^\circ$   
 $\gamma = 43^\circ$

- c.  $a = 7,9 \text{ cm}$   
 $\alpha = 44^\circ$   
 $\gamma = 65^\circ$

## Seiten – Winkel – Seiten – Satz

<b>WIE ?</b>	Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind?		
			
Eine beschriftete Skizze zeigt dir, wo die Seiten und Winkel liegen.	Beginne mit einer Seite, möglichst mit c! Zeichne den Winkel!	Trage die Länge der zweiten Seite am Schenkel ab! So erhältst du den dritten Eckpunkt.	Verbinde und beschrifte! Konstruktionslinien können sichtbar bleiben.

11. Dreieck:  $a = 5,4 \text{ cm}$  ;  $\beta = 67^\circ$  ;  $c = 7,6 \text{ cm}$   
 Markiere in der Skizze die gegebenen Größen!  
 Konstruiere und beschrifte das Dreieck! Miss zur Kontrolle die fehlende Seitenlänge!  
 [  $b \approx 7,4 \text{ cm}$  ]



Wenn der Winkel  $\gamma$  gegeben ist, schafft man es nicht, dass  $c = AB$  waagrecht liegt. Beginne in diesem Fall mit dem Winkel!

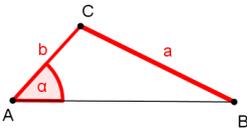
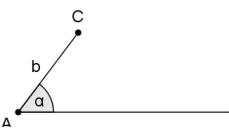
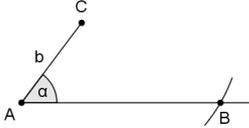
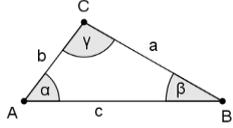
12. Von einem Dreieck kennt man zwei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkel. Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! Kontrolliere mit dem GeoGebra-Applet.

- |    |  |    |   |    |  |
|----|--|----|---|----|--|
| a. | $b = 8,9 \text{ cm}$<br>$c = 3,4 \text{ cm}$<br>$\alpha = 38^\circ$  | b. | $a = 7,5 \text{ cm}$<br>$b = 4,5 \text{ cm}$<br>$\gamma = 63^\circ$ | c. | $a = 9,2 \text{ cm}$<br>$c = 4,3 \text{ cm}$<br>$\beta = 35^\circ$   |
| d. | $a = 5,1 \text{ cm}$<br>$b = 7,9 \text{ cm}$<br>$\gamma = 114^\circ$ | e. | $a = 8,2 \text{ cm}$<br>$c = 5,2 \text{ cm}$<br>$\beta = 133^\circ$ | f. | $b = 5,1 \text{ cm}$<br>$c = 7,5 \text{ cm}$<br>$\alpha = 109^\circ$ |

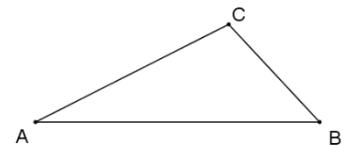
13. Kreuze jene Dreiecke an, die man mit dem Seiten-Winkel-Seiten-Satz konstruieren kann!

a.	b.	c.	d.	e.
$a = 8 \text{ m}$ $b = 2 \text{ m}$ $\alpha = 30^\circ$	$a = 8 \text{ m}$ $b = 2 \text{ m}$ $\gamma = 110^\circ$	$a = 6 \text{ m}$ $c = 7 \text{ m}$ $\beta = 45^\circ$	$a = 5 \text{ m}$ $c = 3 \text{ m}$ $\gamma = 42^\circ$	$b = 9 \text{ m}$ $c = 7 \text{ m}$ $\alpha = 85^\circ$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Seiten – Seiten – Winkel – Satz

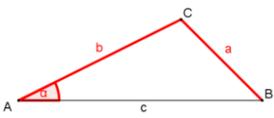
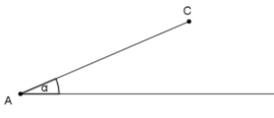
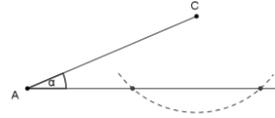
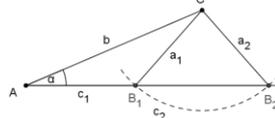
<b>WIE ?</b>	Wie zeichnet man ein Dreieck, von dem zwei Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel gegeben sind? (Zeichne die längere Seite auch in der Skizze länger!)		
			
Eine beschriftete Skizze zeigt dir, wo die Seiten und Winkel liegen.	Zeichne den Winkel und die anliegende Seite!	Die zweite Seite wird von C aus abgetragen.	Verbinde, beschrifte! Konstruktionslinien können sichtbar bleiben.

14. Dreieck:  $a = 3,8 \text{ cm}$  ;  $b = 6,0 \text{ cm}$  ,  $\beta = 43^\circ$   
 Markiere in der Skizze die gegebenen Größen!  
 Konstruiere und beschrifte das Dreieck!  
 Miss zur Kontrolle die fehlende Seitenlänge! [ $c \approx 8,2 \text{ cm}$  ]



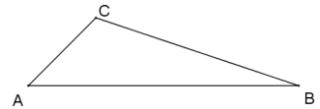
15. Von einem Dreieck kennt man zwei Seitenlängen und einen nicht eingeschlossenen Winkel. Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! Kontrolliere mit dem GeoGebra-Applet!  
 Wenn der Winkel  $\gamma$  gegeben ist, wird zuerst dieser gezeichnet. Die Seite  $c$  wird in diesem Fall nicht waagrecht liegen.
- |  |  |   |
|--|--|---|
| a. $a = 6,5 \text{ cm}$<br>$c = 4,9 \text{ cm}$<br>$\alpha = 53^\circ$ | b. $a = 10,5 \text{ cm}$<br>$b = 4,5 \text{ cm}$<br>$\alpha = 125^\circ$ | c. $a = 5,1 \text{ cm}$<br>$b = 6,5 \text{ cm}$<br>$\beta = 47^\circ$   |
| d. $b = 14 \text{ cm}$<br>$c = 6,3 \text{ cm}$<br>$\beta = 135^\circ$  | e. $a = 4,9 \text{ cm}$<br>$c = 6,8 \text{ cm}$<br>$\gamma = 35^\circ$   | f. $b = 4,7 \text{ cm}$<br>$c = 9,4 \text{ cm}$<br>$\gamma = 109^\circ$ |

In den bisherigen Aufgaben liegt der Winkel der längeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber. Liegt der Winkel der kürzeren Seite gegenüber, kann es zwei Lösungen geben (oder auch keine).

<b>WIE ?</b>	Wie zeichnet man ein Dreieck, bei dem es zwei Lösungen gibt? (Zeichne die längere Seite auch in der Skizze länger!)		
			
Eine beschriftete Skizze zeigt dir, wo die Seiten und Winkel liegen.	Zeichne den Winkel und die anliegende Seite!	Die zweite Seite wird von C aus abgetragen. Es gibt zwei Lösungen.	Verbinde, beschrifte! Konstruktionslinien können sichtbar bleiben.

Beachte: Die Seite  $c_1$  geht von A zu  $B_1$ . Die Seite  $c_2$  geht von A zu  $B_2$ .

16. Dreieck:  $a = 5,8 \text{ cm}$  ;  $b = 2,5 \text{ cm}$  ,  $\beta = 19^\circ$   
 Markiere in der Skizze die gegebenen Größen! Beachte: Der Winkel liegt der kürzeren Seite gegenüber. Konstruiere und beschrifte das Dreieck!  
 Miss zur Kontrolle die fehlenden Seitenlängen! [  $c_1 \approx 3,85 \text{ cm}$ ,  $c_2 \approx 7,12 \text{ cm}$  ]

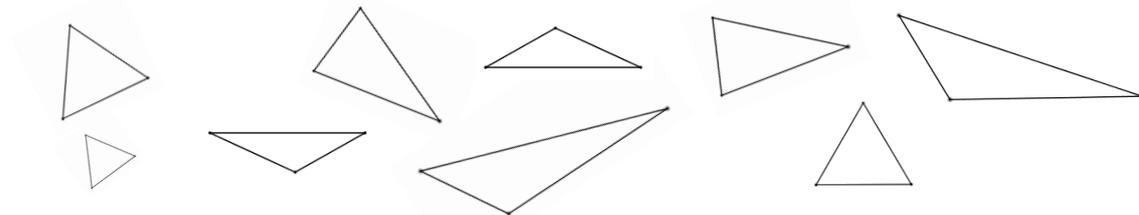


17. Von einem Dreieck kennt man zwei Seitenlängen und einen nicht eingeschlossenen Winkel. Der Winkel liegt der kürzeren Seite gegenüber, deshalb gibt es hier zwei Lösungen. Konstruiere und beschrifte die Dreiecke! Kontrolliere mit dem GeoGebra-Applet!
- a.  $a = 4,9 \text{ cm}$                       b.  $a = 9,3 \text{ cm}$                       c.  $a = 3,5 \text{ cm}$   
 $b = 8,8 \text{ cm}$                                $b = 4,3 \text{ cm}$                                $c = 8,8 \text{ cm}$   
 $\alpha = 28^\circ$                                        $\beta = 23^\circ$                                        $\alpha = 18^\circ$

## Konstruktion von Dreiecken – Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind **kongruent (deckungsgleich)**, wenn sie genau übereinander passen.

18. Kennzeichne jeweils 2 kongruente Dreiecke mit einer Farbe! (Ein Dreieck bleibt übrig.)



Damit man ein Dreieck eindeutig zeichnen kann, muss man drei Bestimmungsstücke kennen, eines davon muss eine Seite sein.

Die 4 grundlegenden Möglichkeiten nennt man **Kongruenzsätze**:  
 SSS-Satz, SWS-Satz, WSW-Satz, SSW-Satz

19. Die folgenden Dreiecke kann man eindeutig konstruieren. Fertige Skizzen an und markiere gegebene Größen farbig! Gib den passenden Kongruenzsatz an!

$a = 14,3 \text{ m}$ $\beta = 103^\circ$ $\gamma = 27^\circ$	$a = 7 \text{ m}$ $b = 9,3 \text{ m}$ $\beta = 42^\circ$	$b = 17 \text{ m}$ $c = 23 \text{ m}$ $\alpha = 52^\circ$

20. Die folgenden Dreiecke können nach dem SSW-Satz konstruiert werden. Begründe bei jedem Dreieck, ob die Konstruktion eindeutig ist oder nicht!

- a.  $a = 28 \text{ cm}$                       b.  $a = 39 \text{ cm}$                       c.  $b = 7,2 \text{ m}$   
 $c = 42 \text{ cm}$                                $c = 53 \text{ cm}$                                $c = 9,5 \text{ m}$   
 $\alpha = 38^\circ$                                        $\gamma = 63^\circ$                                        $\beta = 35^\circ$

nicht eindeutig, weil ...