Neusis di Pappo

Problema

Siano date due rette perpendicolari AB e AC incidenti in A, un punto O e una lunghezza a. Costruire la retta passante per O che interseca AB e AC in E e F tali che $\overline{EF} = a$.

Metodo

Intersezione di coniche.

Costruzione tramite GeoGebra

Per semplicità e senza perdere generalità è possibile considerare AB orizzontale e AC verticale e $O = (0, 0)$.

1. Si costruiscano gli assi cartesiani e sia O il loro punto d'origine.

2. Si costruisca lo slider della quantità positiva a.

3. Sia A un punto qualsiasi.

4. Si costruiscano le rette $y = y(A)$ e $x = x(A)$. Siano B e C i rispettivi punti di intersezione con l'asse delle ordinate e delle ascisse.

5. Si costruisca l'iperbole equilatera passante per C e con asintoti lungo AB e OB

   $$y = \frac{y(A)x + y(C)x(C) - y(A)x(C)}{x}$$

   Dimostrazione formula:
   L'equazione generica di una iperbole equilatera con centro in $B = (x_B, y_B)$ è data da

   $$y = \frac{y_B x + k}{x - x_B}$$

   con k costante.
   Poichè l'iperbole deve passare per il punto C, si pone:

   $$y_C = \frac{y_B x_C + k}{x_C - x_B}$$
   $$\Rightarrow k = y_C x_C - y_B x_C - x_B y_C$$

   In particolare, $B = (0, y_A)$, e quindi si ottiene l'equazione cercata.

6. Si costruisca la circonferenza di centro C e raggio a. (Strumento: circonferenza dati centro e raggio)
   Sia D il suo punto di intersezione con l'iperbole più vicino alla retta AB.

7. Si costruisca la retta parallela ad AC passante per D. Sia E il suo punto di intersezione con la retta AB.

8. Si costruisca la retta OE. Sia F il suo punto di intersezione con il segmento $\overline{AC}$.

Utilizzo

Si selezioni il valore di a desiderato.
Allora, $\overline{EF} = a$ e la retta cercata è data da OE.

Dimostrazione

Si costruiscano il segmento $\overline{CD}$ e la retta parallela ad AB passante per D che interseca OB in G.

- I rettangoli $BEDG$ e $BACO$ hanno area uguale poiché C e D sono entrambi sull'iperbole.
  $\Rightarrow \overline{BE} \times \overline{ED} = \overline{BA} \times \overline{AC} \quad \Rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{ED}}$ (1)
- I triangoli $\triangle BEO$ e $\triangle COF$ sono simili
  $\Rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{CF}} \quad \Rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CO}} = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{CF}} \quad \Rightarrow \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$ (2)
- Da (1) e (2) si ottiene che $\overline{ED} = \overline{CF}$ e per costruzione sono paralleli $\Rightarrow EDCF$ è un parallelogramma
  $\Rightarrow \overline{EF} = \overline{DC} = a$