두-둥탁

즐거운 미적분학

교과서 140쪽	부분적분법	학번 이름	확인

부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

문제1. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx$

$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -x\cdot\cos x + \sin x + C$

(2) $\int \underbrace{(x-1)}_{f}\underbrace{e^x}_{g}\,dx = (x-1)e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$

$= (x-1)e^x - e^x + C$

$= (x-2)e^x + C.$

문제2. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$= x^2\cdot e^x - \int 2x\cdot e^x\,dx$

$= x^2e^x - \int \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx$

$= x^2e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x\,dx\right]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$= (x^2-2x+2)e^x + C$

(2) $\int (\ln x)^2\,dx = \int \underbrace{(\ln x)^2}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx$

$= (\ln x)^2\cdot x - \int 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\,dx$

$= x(\ln x)^2 - 2\left[\ln x\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx\right]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

생각과 표현 문제 해결 추론 창의 융합 의사소통

찬열이는 부분적분법을 이용하여 부정적분 $\int (x+2)e^x\,dx$를 다음과 같이 구하고 있다. 찬열이가 제대로 구하지 못한 이유를 설명하고, 바르게 풀어 보자.

$f(x)=e^x$, $g'(x)=x+2$로 놓으면

$f'(x)=e^x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$이므로 복잡해짐.

$$\int (x+2)e^x\,dx = e^x\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right) - \int e^x\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx$$

$f(x)=x+2$ $g(x)=e^x$ 라 두면

$\int (x+2)e^x\,dx = (x+2)e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$

$= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$

즐거운 미적분학

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

문제3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{2x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'}\, dx$

$= [2x \cdot \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cdot \sin x\, dx$

$= -\pi + [2\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -\pi - 2$

(2) $\int_1^e \underbrace{x}_{g'} \underbrace{\ln x}_{f}\, dx$

$= [\ln x \cdot \frac{1}{2}x^2]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2\, dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e \frac{1}{2}x\, dx$

$= \frac{1}{2}e^2 - [\frac{1}{4}x^2]_1^e$

$= \frac{1}{4}(e^2+1)$

생각과 표현 | 문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통

다음은 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$에서 $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$로 놓으면 $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = [-e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{(가)}\, dx$ (가) $e^x \cos x$

$= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{(가)}\, dx$ ...... ㉠

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{(가)}\, dx$에서 $u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$로 놓으면 $u'(x) = e^x$, $v(x) = \sin x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{(가)}\, dx = [\boxed{(나)}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$ ...... ㉡   (나) $\sin x \cdot e^x$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = \boxed{(다)}$ (다) $\frac{1}{2}(1+e^{\frac{\pi}{2}})$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x\, dx = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x\, dx$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x\, dx = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$ 이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ 이다.