Partie 3 : Démontrer les conjectures

1. **Démonstration de la conjecture 1 :**

On pose $x = AM$.

a. Exprimer les longueurs BN, NC en fonction de x.
b. Exprimer l'aire des triangles BNM, NCP, PDQ et AMQ en fonction de x.
c. Démontrer que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
d. Montrer que placer exactement le point M tel que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit égale à 25 cm² revient à résoudre l'équation $2x^2 - 14x + 23 = 0$.
e. Résoudre alors l'équation $2x^2 - 14x + 23 = 0$ dans l'intervalle [0 ; 6] et répondre au problème.

2. **Démonstration de la conjecture 2 :**

a. Quel est le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$ définie sur [0 ; 6] par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 14x + 48$? justifier votre réponse.
b. Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole courbe représentative de la fonction $\mathcal{A}$.
c. En déduire que $\mathcal{A}$ est minimale pour $x = \frac{7}{2}$. Déterminer son minimum.
d. Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$.

3. **Démonstration de la conjecture 3 :**

a. Démontrer que résoudre le problème revient à résoudre l'inéquation $2x^2 - 14x + 18 > 0$.
b. Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 14x + 18$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont vous préciserez les coordonnées.
c. Déterminer le sommet de la parabole représentant f.
d. Tracer sur votre feuille une allure de la courbe représentative de la fonction f.
e. Résoudre l'inéquation $2x^2 - 14x + 18 > 0$ sur [0 ; 6] en utilisant l'allure de la courbe représentative de la fonction f et répondre au problème.