

Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 6 - adjunto y aplicación en el cálculo de la matriz inversa

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz que verifica $AB^t X - X = 2B$.

$$AB^t X - X = 2B \rightarrow (AB^t - I)X = 2B \rightarrow X = (AB^t - I)^{-1} \cdot 2B$$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|AB^t - I| = -1 \rightarrow$ El determinante no es nulo, por lo que existe la matriz inversa.

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{[adj(AB^t - I)]^t}{|AB^t - I|}$$

Recordamos que la matriz de adjuntos tiene como elementos los distintos adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j} |\alpha_{ij}|$ de la matriz.

$$A_{11} = 2, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = 0$$

$$A_{21} = 1, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 1, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 1$$

Es decir:

$$adj(AB^t - I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(AB^t - I)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{[adj(AB^t - I)]^t}{|AB^t - I|} \rightarrow (AB^t - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operamos:

$$X = (AB^t - I)^{-1} \cdot 2B \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$. Decidir si la matriz tiene inversa para $a=1$ y, en caso afirmativo, calcularla.

Calculamos el determinante de la matriz.

$$|A| = -a(a^2 - 1) - (2a) = -a^3 - a$$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3 - a = 0 \rightarrow -a(a^2 + 1) = 0 \rightarrow a = 0$$

Discusión de casos.

Si $a \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3 \rightarrow$ sí admite inversa

Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe al menos un

menor de orden 2 no nulo $\rightarrow \text{rango}(A) = 2 \rightarrow$ no admite inversa

Por lo tanto, para $a = 1$ la matriz sí existe inversa, ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|}$$

Calculamos los distintos adjuntos.

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 1, \quad A_{22} = -2, \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Para $m=1$ **calcula** A^{-1} .

b) Para $m=1$ **calcula** X **que satisface** $A \cdot X - B = A \cdot B$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2$$

$$\text{Es decir } \rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{En efecto } \rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X - B = A \cdot B \rightarrow A \cdot X = A \cdot B + B \rightarrow A \cdot X = (A + I) B \rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + I) \cdot B$$

$$X = (A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot I) \cdot B \rightarrow X = (I + A^{-1}) \cdot B$$

Operamos.

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I + A^{-1}) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$.

a) Obtener $|A^{10}|$.

b) Para $m=0$ calcular, si es posible, la matriz inversa de A .

a) $|A^{10}| = |A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot \dots \cdot |A| = |A|^{10}$

$$|A| = (m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}| = ((m+2)(m^2-1))^{10}$$

b) Si $m=0 \rightarrow |A| = (0+2)(0-1) = -2 \neq 0 \rightarrow$ Existe la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos.

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = 0, \quad A_{22} = -2, \quad A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = -2, \quad A_{33} = 2$$

$$[adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, esta es la matriz inversa, ya que satisface: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

5. Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) Resuelve $A X = -3 X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

a) Operamos matricialmente.

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Una matriz admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto:

$$|A + \lambda I| = (-2 + \lambda)(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4(-2 + \lambda)$$

Sacamos factor común e igualamos a cero.

$$(-2 + \lambda)[(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4] = 0$$

En un producto igualado a cero, al menos uno de los términos debe anularse. Es decir:

$$(-2 + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$[(1 + \lambda)(-2 + \lambda) - 4] = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = -2, \lambda = 3$$

En conclusión. Existe inversa siempre y cuando se cumpla que $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 3$

b) Operamos e igualamos.

$$A X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ -2x + y \\ -2z \end{pmatrix}, \quad -3X = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x - 2y \\ -2x + y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales, por lo que obtenemos un sistema 3x3.

$$\begin{cases} -2x - 2y = -3x \\ -2x + y = -3y \\ -2z = -3z \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera ecuación} \rightarrow z = 0$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es -2 veces la primera, por lo que podemos obviarla.

$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \rightarrow$ Una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo: $y = \alpha$. De esta forma, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Sus infinitas soluciones son:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Si } \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{solución general con } x = 1$$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a existe la inversa de A ?

b) Hallar el valor de a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

a) La matriz A de orden $n=3$ posee inversa si su determinante es no nulo. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -2a^2 \neq 0$$

Por lo tanto, si $a \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Existe inversa de A .

b) Calculamos la inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix}}{-2a^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

E igualamos la inversa a $\frac{1}{4}A$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}$$

Igualemos cada uno de los coeficientes de ambas matrices para obtener las condiciones que debe cumplir a .

- Coeficientes $a_{11} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \rightarrow a = \pm 2$
- Coeficientes $a_{12} \rightarrow \frac{-1}{a} = \frac{-1}{2} \rightarrow a = 2$
- Coeficientes $a_{32} \rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \rightarrow a = 2$
- Coeficientes $a_{33} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \rightarrow a = \pm 2$

Por lo tanto las cuatro condiciones se cumplen siempre que $a = 2$.

7. Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$A B C = D \rightarrow B = A^{-1} D C^{-1}$$

Calculamos las inversas de A y de C , siempre y cuando sus determinantes sean no nulos (condición necesaria y suficiente para existencia de matriz inversa).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$$

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |C| = 1$$

$$C^{-1} = \frac{[\text{adj}(C)]^t}{|C|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B = A^{-1} D C^{-1} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m se verifica $A^2 = 2A + B$?

b) Para $m=1$ calcula A^{-1} .

c) Para $m=1$ calcula X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

$$a) A^2 = 2A + B \rightarrow \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operamos.

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & 1+m+1-m \\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 + 2 + 2m & 2 \\ 2 & m^2 + 2 - 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2m & 1 \\ 3 & 2 - 2m \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$$2 = 1, \quad 2 = 3$$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

$$b) A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2$$

$$\text{Es decir } \rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{En efecto } \rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X - B = A \cdot B \rightarrow A \cdot X = A \cdot B + B \rightarrow A \cdot X = (A + I)B \rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + I) \cdot B$$

$$X = (A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot I) \cdot B \rightarrow X = (I + A^{-1}) \cdot B$$

Operamos.

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I + A^{-1}) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$.

a) Obtener $|A^{10}|$.

b) Para $m=0$ calcular, si es posible, la matriz inversa de A .

a) $|A^{10}| = |A \cdot A \cdot A \cdots A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdots |A| = |A|^{10}$

$|A| = (m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}| = ((m+2)(m^2-1))^{10}$

b) Si $m=0 \rightarrow |A| = (0+2)(0-1) = -2 \neq 0 \rightarrow$ Existe la matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos.

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = 0, \quad A_{22} = -2, \quad A_{23} = 0$$

$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = -2, \quad A_{33} = 2$$

$$[adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, esta es la matriz inversa, ya que satisface: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el rango de A en función del parámetro real a .

b) Decidir si la matriz tiene inversa para $a=1$ y, en caso afirmativo, calcularla.

a) Calculamos el determinante de la matriz $\rightarrow |A| = -a(a^2-1) - (2a) = -a^3 - a$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3 - a = 0 \rightarrow -a(a^2 + 1) = 0 \rightarrow a = 0$$

Discusión de casos.

Si $a \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$

Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe al menos un

menor de orden 2 no nulo $\rightarrow \text{rango}(A) = 2$

b) Para $a=1$ si existe inversa, ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|}$$

Calculamos los distintos adjuntos.

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 1, \quad A_{22} = -2, \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudia, según los valores de k , el rango de la matriz resultante de operar $AB^t + kI$, donde B^t es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3.

b) Calcula la matriz que verifica $AB^t X - X = 2B$.

$$\begin{aligned} \text{a) } AB^t &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad kI = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \\ AB^t + kI &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -1+k & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante $|AB^t + kI|$. Si el determinante fuese distinto de 0, su rango sería 3. Y para los valores de k donde se anule el determinante, estimaremos en cada caso el rango de la matriz.

$$|AB^t + kI| = \begin{vmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ -1 & -1+k & -1 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \rightarrow |AB^t + kI| = k(k^2 - 1) + k \rightarrow |AB^t + kI| = k^3$$

Si $k \neq 0 \rightarrow |AB^t + kI| \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$

Si $k = 0 \rightarrow |AB^t + kI| = 0 \rightarrow \text{Rango} \neq 3$

Estudiamos el rango para $k = 0 \rightarrow AB^t + 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Las tres columnas de la matriz son iguales, por lo que solo hay un vector columna linealmente independiente dentro de la matriz $\rightarrow \text{Rango} = 1$.

b) $AB^t X - X = 2B \rightarrow (AB^t - I)X = 2B \rightarrow X = (AB^t - I)^{-1} \cdot 2B$

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|AB^t - I| = -1 \rightarrow$ El determinante no es nulo, por lo que existe la matriz inversa.

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{[adj(AB^t - I)]^t}{|AB^t - I|}$$

Recordamos que la matriz de adjuntos tiene como elementos los distintos adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j} |\alpha_{ij}|$ de la matriz.

$$A_{11}=2 \quad , \quad A_{12}=-1 \quad , \quad A_{13}=0$$

$$A_{21}=1 \quad , \quad A_{22}=0 \quad , \quad A_{23}=0$$

$$A_{31}=1 \quad , \quad A_{32}=-1 \quad , \quad A_{33}=1$$

Es decir:

$$\text{adj}(A B^t - I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{adj}(A B^t - I)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A B^t - I)^{-1} = \frac{[\text{adj}(A B^t - I)]^t}{|A B^t - I|} \rightarrow (A B^t - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operamos:

$$X = (A B^t - I)^{-1} \cdot 2 B \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$