8 El volum dels cossos geomètrics

L'entorn que ens envolta és el nostre espai i diem que l'espai és de tres dimensions. Aquesta afirmació és deguda a que s'associen les formes dels objectes que ens envolten amb models geomètrics. El model geomètric que es pot trobar molt sovint és el d'un ortòedre. Les tres construccions que formen l'arc de la fotografia tenen aquesta forma, com també la té una habitació, una capsa o un tetrabric. Les tres dimensions d'un ortòedre són l'amplària, la llargària i l'altura.

Per mesurar l'espai que ocupa un cos caldrà mesurar, de manera indirecta, el volum dels diferents cossos geomètrics que en són model i relacionar aquest volum amb la capacitat que tot sovint veiem escrita en la majoria d'envasos que utilitzem habitualment.

QÜESTIONS

- Les cares d'un cub són quadrats de 3 cm de costat. Calcula la superfície de totes les cares d'un cub.
- Observa un envàs de tetrabric. Quines són les figures que formen les seves cares?
- Quines unitats de capacitat coneixes? Indica la unitat de capacitat més adient per mesurar:

  a) El líquid d'un vial d'injecció.

  b) El carburant d'un dipòsit per a la calefacció.

  c) El gasoil que transporta una cisterna.

  d) L'aigua d'una garrafa.
- Raona què ocupa més espai, un cub d'1 cm d'aresta o un ortòedre de les següents dimensions: 2 cm, 1 cm i 1 cm.
- Imagina que tens vuit cubs d'1 cm d'aresta i els vols col·locar de manera que formin un altre cub més gran. Quants centímetres mesurarà l'aresta del nou cub?

OBJECTIUS

- Identificar els políedres, prismes, piràmides, cilindres i cons.
- Calcular l'àrea dels cossos geomètrics tot observant les figures planes que els limiten.
- Obtenir les diferents unitats de volum i les seves equivalències.
- Transformar i expressar de manera diferent les unitats de volum.
- Calcular el volum dels diferents cossos geomètrics.
- Relacionar les mesures de volum amb les de capacitat.

1. Políedres

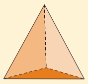
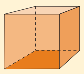
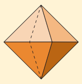
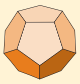
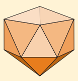
Si observes una capsa de sabates, cadascuna de les sis cares es pot identificar amb una figura plana, generalment un rectangle. Les combinacions de polígons que tenen costats en comú poden limitar regions de l'espai i donar lloc a diferents cossos geomètrics.

Un **políedre** és la regió de l'espai limitada per quatre o més polígons, que són les seves cares. Un políedre és un cos geomètric.

Els políedres poden ser **regulars** o **irregulars**. Els políedres regulars tenen tots els polígons de les seves cares iguals. Aquesta condició no es compleix en els políedres irregulars. Existeixen cinc políedres regulars: *tetràedre*, *hexàedre* o *cub*, *octàedre*, *dodecàedre* i *icosàedre*.

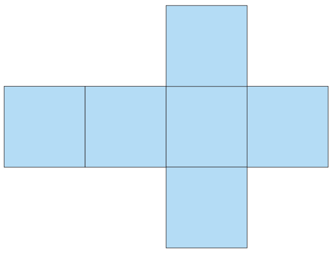
La paraula políedre prové del grec i es compon de *poli*, que significa 'molts', i *edre*, que vol dir 'cara'.

Políedres regulars

	nom	*característiques*
	tetràedre	4 cares que són triangles equilàters
	hexàedre o cub	6 cares que són quadrats
	octàedre	8 cares que són triangles equilàters
	dodecàedre	12 cares que són pentàgons
	icosàedre	20 cares que són triangles equilàters

Dels molts políedres irregulars que hi ha, prestarem especial atenció als **prismes** i a les **piràmides**. Cal indicar, però, que tots els prismes són políedres irregulars excepte un, el cub. Amb les piràmides passa el mateix: totes són políedres irregulars excepte el tetràedre.

Sempre es pot fer coincidir una de les cares d'un políedre sobre una taula, ja que es tracta d'una superfície plana. Generalment, a aquesta cara se la denomina base del políedre. En el cas dels prismes i les piràmides es pren com a base el polígon que els dóna nom.



Pots construir-te diferents políedres tot enganxant polígons. Prova de fer-ho i veuràs les limitacions amb què et trobes. Amb sis quadrats iguals pots construir un cub.

La representació plana dels diferents polígons que formen un políedre i que permeten reconstruir-lo és el que s'anomena **desenvolupament** pla del políedre. A la figura pots veure el d'un cub. Cal destacar que el desenvolupament pla d'un políedre no és únic.

En cada políedre cal considerar la superfície que el determina, formada per polígons, a més de l'espai que aquesta superfície limita. La mesura de la superfície de les cares del políedre és la seva **àrea** i la mesura de l'espai que ocupa és el seu **volum**.

Si construeixes un cub de cartolina, les sis cares del cub limiten un espai que està ocupat per aire. En canvi, si el cub és massís, aquest espai l'ocupa el material utilitzat en la seva construcció. El nom que es dóna als diferents políedres no distingeix generalment un concepte de l'altre.

activitats resoltes

1. El costat de cada una de les sis cares d'un cub mesura 5 cm. Calcula l'àrea del cub i expressa el resultat en decímetres quadrats.

Les cares del cub són 6 quadrats iguals:

$A = 6 \cdot (5\ \text{cm})^2 = 150\ \text{cm}^2$

Expressem el resultat en decímetres quadrats:

$$150\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2 \cdot \frac{1\ \text{dm}^2}{100\ \text{cm}^2} = 1{,}5\ \text{dm}^2$$

2. Un tetràedre és el políedre amb el menor nombre de cares? Quins són els polígons que les formen? Si el costat d'un d'aquests polígons mesura 2 cm, quina és l'àrea del tetràedre?

Un tetràedre està format per 4 cares que són triangles equilàters. És el políedre amb el menor nombre de cares.

Per calcular l'àrea cal multiplicar per 4 l'àrea del triangle equilàter de costat 2 cm. Prèviament calcularem l'altura d'aquest triangle que és el catet d'un triangle rectangle d'hipotenusa 2 cm i l'altre catet 1 cm:

$h = \sqrt{4\ \text{cm}^2 - 1\ \text{cm}^2} = \sqrt{3\ \text{cm}^2} = 1{,}73\ \text{cm}$

Àrea d'un triangle:

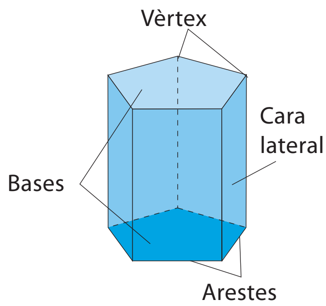
$$A = \frac{2\ \text{cm} \cdot 1{,}73\ \text{cm}}{2} = 1{,}73\ \text{cm}^2$$

L'àrea del tetràedre: $A = 4 \cdot 1{,}73\ \text{cm}^2 = 6{,}92\ \text{cm}^2$.

2. Prismes

Una capsa, un armari, un edifici i diferents envasos, entre d'altres objectes, tenen com a model geomètric un **prisma**.

Un **prisma** és un políedre limitat per dos polígons iguals situats en plans paral·lels, anomenats bases, i per tants paral·lelograms, anomenats cares laterals, com costats té una base.



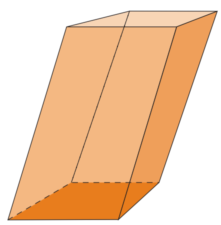
Prisma recte

En el prisma de la figura hi pots observar les cares laterals, les dues bases, les arestes i els vèrtexs. Cada aresta és la intersecció de dues cares, i en cada vèrtex hi concorren tres arestes.

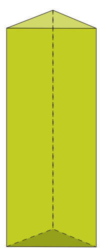
Els prismes poden ser **rectes** o **oblics**. Un prisma és recte si les arestes laterals són perpendiculars a les bases i, per tant, les cares laterals són rectangles o quadrats. Un prisma és oblic si no és recte.

Els prismes també poden ser **regulars** o **irregulars**. Un prisma és regular quan és recte i les seves bases són polígons regulars. Per altra banda, un prisma és irregular si no compleix alguna d'aquestes condicions. Ens ocuparem dels prismes rectes i principalment dels regulars.

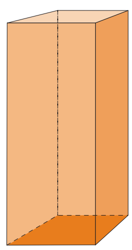
Els prismes s'anomenen segons el polígon de la base: *triangulars*, *quadrangulars*, *pentagonals*, *hexagonals*, etc.



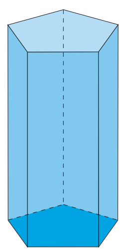
Prisma oblic



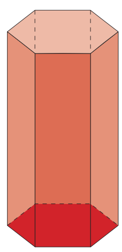
Prisma triangular



Prisma quadrangular

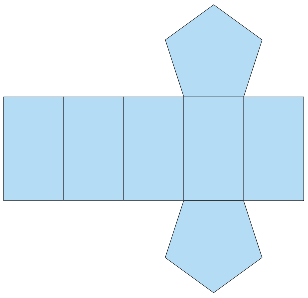


Prisma pentagonal



Prisma hexagonal

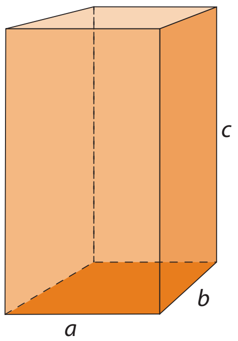
El cub és un prisma quadrangular regular i un políedre regular.



Les arestes **laterals** són els costats dels rectangles o dels quadrats que formen les cares laterals.

Les arestes **bàsiques** són els costats dels polígons que formen les bases. Els **vèrtexs** del prisma coincideixen amb els vèrtexs dels polígons de les bases. L'**altura** d'un prisma és la distància entre les dues bases. En el cas dels prismes rectes, l'altura té la mateixa longitud que l'aresta lateral del prisma.

Com tots els políedres, els polígons que limiten els prismes i que en permeten la reconstrucció també es poden representar en un pla. A la figura tens el desenvolupament pla d'un prisma pentagonal regular.



Ortòedre

Un **paral·lelepípede** és un prisma que té per bases dos paral·lelograms. Les seves cares són paral·leles dues a dues.

El prisma quadrangular regular, el cub i l'ortòedre són tres paral·lelepípedes rectes. L'**ortòedre** està limitat per sis rectangles que són iguals dos a dos. Les longituds *a*, *b* i *c* de les tres arestes que concorren en un mateix vèrtex se solen anomenar dimensions de l'ortòedre. Dues d'aquestes longituds són l'amplària i la llargària d'un dels rectangles que es pot considerar la base de l'ortòedre i l'altra és l'altura de l'ortòedre.

Per calcular l'àrea d'un prisma cal sumar les àrees dels polígons que formen les seves cares. Es pot distingir entre l'**àrea lateral**, formada per les àrees dels rectangles de les cares laterals, i l'**àrea total** que és l'àrea lateral més l'àrea de les bases.

activitats resoltes

3. Fes el recompte del nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cada un dels prismes següents: triangular, pentagonal, octogonal i hexagonal.

Cal manipular i observar els elements d'aquests prismes i podem fer el recompte tot anotant-lo en una taula:

Prismes	*Cares*	*Vèrtexs*	*Arestes*
Triangular	5	6	9
Pentagonal	7	10	15
Octogonal	10	16	24
Hexagonal	8	12	18

Pots comprovar, en tots els casos, que la suma del nombre de cares i el nombre de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més 2. Aquesta relació va ser formulada per Euler i, per això, porta el seu nom. S'escriu com $C + V = A + 2$ i són molts els políedres que la compleixen.

4. Calcula l'àrea d'un ortòedre de dimensions $a = 4$ cm, $b = 5$ cm i $c = 6$ cm.

Els sis rectangles que formen l'ortòedre són iguals dos a dos. Dos tenen de dimensions *a* i *b*, altres dos *a* i *c* i els dos restants, *b* i *c*. L'expressió que dóna l'àrea és:

$A = 2ab + 2ac + 2bc$

Substituïm les dimensions pels seus valors i calculem:

$A = 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} + 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} + 2 \cdot 5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} =$
$= 148\text{ cm}^2$

L'àrea de l'ortòedre és 148 cm^2.

5. Troba l'àrea total d'un prisma hexagonal regular d'aresta bàsica 6 cm i d'altura 10 cm.

L'àrea lateral del prisma hexagonal està formada per 6 rectangles de base 6 cm i altura 10 cm.

$A_l = 6 \cdot 6\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 360\text{ cm}^2$

Les dues bases són hexàgons. Per calcular la seva àrea cal trobar l'apotema del polígon que té el costat igual al radi. L'apotema és l'altura d'un triangle equilàter de costat 6 cm. Utilitzant el teorema de Pitàgores:

$a = \sqrt{36\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2} = \sqrt{27\text{ cm}^2} \approx 5{,}2\text{ cm}$

Prenem com a valor de l'apotema $a = 5{,}2$ cm.

Utilitzem l'expressió de l'àrea d'un polígon regular per calcular l'àrea d'una de les bases: $A_p = \dfrac{P \cdot a}{2}$,

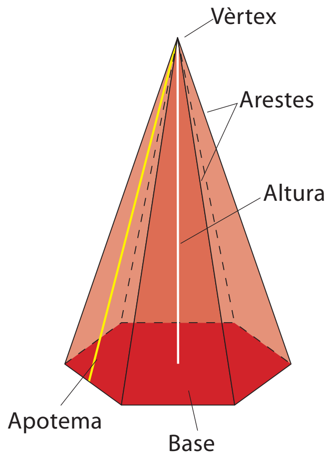
i per tant, l'àrea de les dues bases és:

$2A_b = 2 \cdot \dfrac{36\text{ cm} \cdot 5{,}2\text{ cm}}{2} = 187{,}2\text{ cm}^2$

L'àrea total del prisma és:

$A_t = A_l + 2\,A_b = 360\text{ cm}^2 + 187{,}2\text{ cm}^2 = 547{,}2\text{ cm}^2$.

3. Piràmides



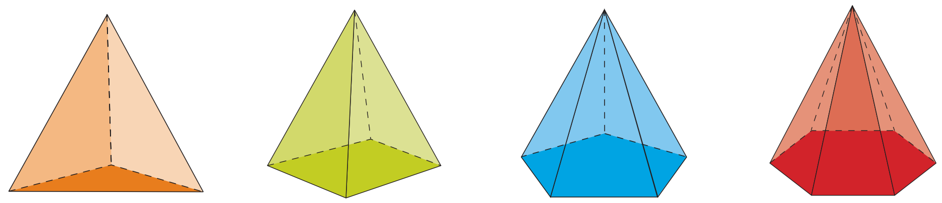
El nom de *piràmides* s'associa sempre a les piràmides d'Egipte. No obstant això, hi ha també campanars en forma de piràmide i altres objectes que tenen aquest cos geomètric com a model.

> Una **piràmide** és un políedre limitat per un polígon anomenat base i per tantes cares triangulars com costats té la base, amb un vèrtex comú.

A la piràmide de la figura hi pots observar la base, els triangles de les cares laterals, les arestes laterals on s'uneixen dues de les cares laterals, les arestes bàsiques que coincideixen amb els costats del polígon de la base i els vèrtexs on concorren les arestes. De tots els vèrtexs, cal destacar el que tenen en comú totes les arestes laterals: s'anomena el **vèrtex de la piràmide**. L'**altura** de la piràmide és el segment de perpendicular que va des del vèrtex fins a la base. Les altures dels triangles de les cares laterals es coneixen com **apotemes** de la piràmide.

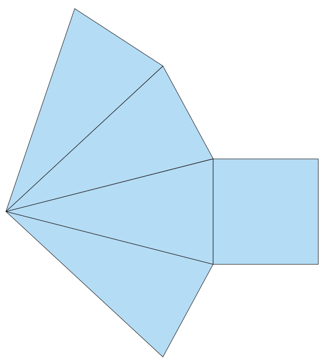
Un tetràedre és una piràmide triangular regular i, alhora, un políedre regular.

Les piràmides s'anomenen segons el polígon de la base: piràmides *triangulars*, *quadrangulars*, *pentagonals*, *hexagonals*, etc.



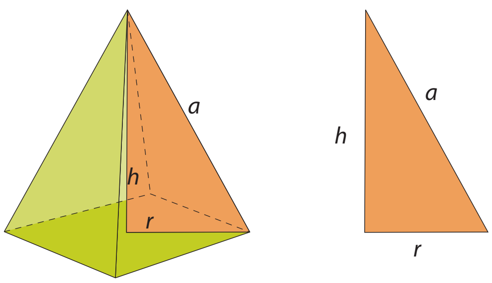
Piràmide triangular — Piràmide quadrangular — Piràmide pentagonal — Piràmide hexagonal

Les piràmides es classifiquen en *regulars* i *irregulars*. Una piràmide és **regular** si ho és el polígon de la base i el peu de l'altura coincideix amb el centre del polígon regular de la base. Totes les cares laterals són triangles isòsceles o equilàters iguals i les apotemes de la piràmide també ho són, és per això que parlem de l'apotema de la piràmide. Una piràmide és **irregular** quan no és regular, és a dir, quan no verifica alguna de les condicions anteriors.



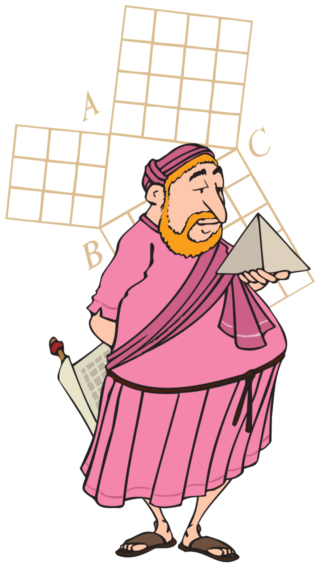
A la figura s'ha dibuixat el desenvolupament pla d'una piràmide quadrangular regular. Hi pots observar el quadrat de la base i els quatre triangles isòsceles de les cares laterals.

En qualsevol piràmide regular podem considerar dos triangles rectangles que tenen un catet comú: l'**altura** de la piràmide.



a: aresta
h: altura
r: radi

Si observes la figura hi pots veure un triangle rectangle en què l'altura és un catet, l'altre catet és el radi de la circumferència circumscrita al polígon de la base i la hipotenusa és l'aresta lateral de la piràmide.

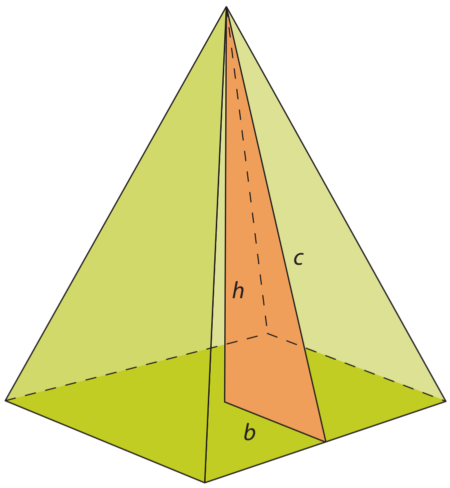


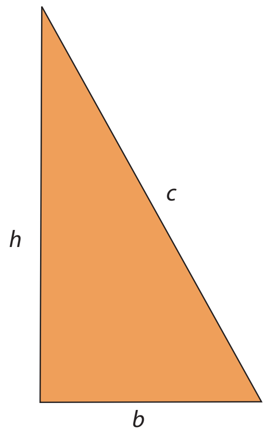
L'àrea total A_t d'una piràmide s'expressa per: $A_t = A_l + A_b$.

En la piràmide de la figura s'assenyala el triangle rectangle en què l'altura és un catet. L'altre catet és l'apotema del polígon de la base i la hipotenusa és l'apotema de la piràmide.

La identificació d'aquests triangles rectangles permet relacionar les longituds dels seus costats utilitzant el teorema de Pitàgores, i calcular-ne una si es coneixen les altres dues.

Per calcular l'àrea d'una piràmide cal sumar les àrees dels polígons que formen les seves cares. Es pot distingir entre l'**àrea lateral**, formada per les àrees dels triangles de les cares laterals, i l'**àrea total**, que és l'àrea lateral més l'àrea de la base.

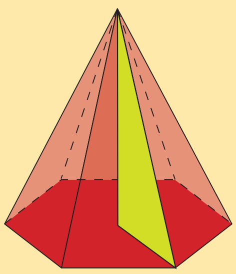


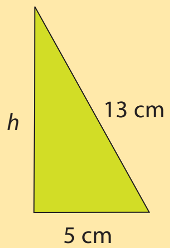


c: apotema de la piràmide
b: apotema de la base
h: altura

activitats resoltes

6. L'aresta lateral d'una piràmide hexagonal regular mesura 13 cm i l'aresta bàsica, 5 cm. Quant fa l'altura de la piràmide?





Com que el polígon de la base és un hexàgon regular, l'aresta bàsica és igual al radi de la circumferència circumscrita al polígon. Coneixem la hipotenusa i un catet del triangle rectangle de la figura i hem de calcular-ne l'altre catet. Apliquem, doncs, el teorema de Pitàgores:

$h = \sqrt{169\ \text{cm}^2 - 25\ \text{cm}^2} = \sqrt{144\ \text{cm}^2} = 12\ \text{cm}$

L'altura de la piràmide mesura 12 cm.

7. Calcula l'àrea total d'una piràmide quadrangular regular d'aresta bàsica 4 cm i aresta lateral 8 cm.

L'àrea total de la piràmide és la suma de l'àrea lateral formada per les àrees de 4 triangles isòsceles iguals i l'àrea de la base, que és un quadrat.

Per calcular l'àrea d'un dels triangles cal buscar la seva altura, que és un catet en un triangle rectangle en el qual la hipotenusa és l'aresta de longitud 8 cm i l'altre catet és la meitat de l'aresta bàsica, és a dir, 2 cm:

$h = \sqrt{64\ \text{m}^2 - 4\ \text{cm}^2} = \sqrt{60\ \text{cm}^2} \approx 7{,}75\ \text{cm}$

L'altura del triangle és 7,75 cm.

$$A_l = 4 \cdot \frac{4\ \text{cm} \cdot 7{,}75\ \text{cm}}{2} = 62\ \text{cm}^2$$

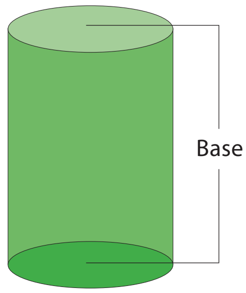
$A_b = (4\ \text{cm})^2 = 16\ \text{cm}^2$

L'àrea total de la piràmide és:

$A = 62\ \text{cm}^2 + 16\ \text{cm}^2 = 78\ \text{cm}^2$

4. Cossos de revolució

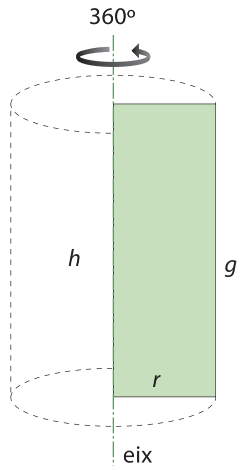
Hi ha cossos geomètrics que no estan limitats per polígons i, per tant, no són políedres. Analitzarem i descriurem dos dels anomenats cossos de revolució: el cilindre i el con. S'anomenen així perquè tant l'un com l'altre es poden generar fent girar figures planes.



El cilindre

Un pot de llauna, un pirulí, molts recipients, etc. són alguns dels objectes que tenen forma cilíndrica. El **cilindre** és un cos geomètric que es pot considerar com a model de força elements del nostre entorn més proper.

> Un **cilindre** és el cos geomètric limitat per dues bases que són cercles i una superfície lateral corba.

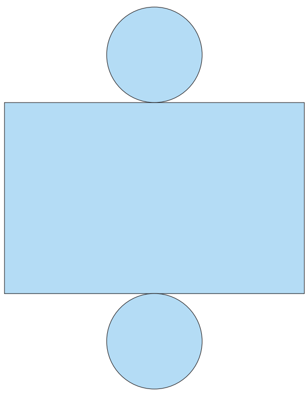


Un cilindre és **recte** si l'altura és el segment que uneix els dos centres de les circumferències de les bases. En cas contrari, direm que el cilindre és **oblic**.

Si considerem un rectangle i el fem girar 360° al voltant d'un dels seus costats, el costat paral·lel a l'eix de gir genera la superfície corba del cilindre i els costats perpendiculars a l'eix generen els dos cercles de les bases. Així, el cilindre és el cos de revolució que s'obté quan girem un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

El costat del rectangle que genera la superfície cilíndrica s'anomena **generatriu** del cilindre. En els cilindres rectes la longitud de la generatriu és igual que la de l'**altura**. El **radi** del cilindre és el radi del cercle de cada base. La longitud del radi del cilindre coincideix amb la longitud del costat del rectangle que és perpendicular a l'eix de gir.

A la figura pots observar el desenvolupament pla d'un cilindre. Està format per un rectangle, que és la superfície lateral del cilindre, i els dos cercles de les bases.

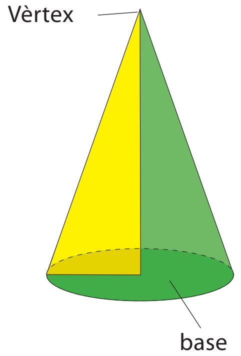


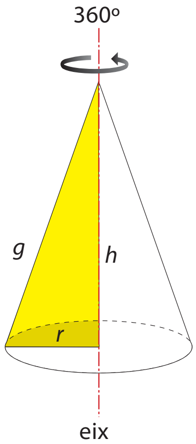
Recorda

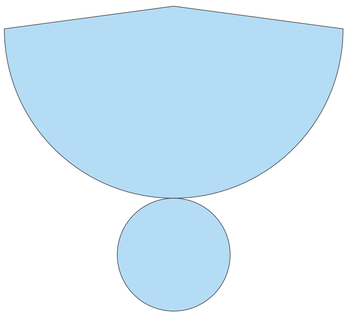
La longitud d'una circumferència s'expressa:
$L = 2\pi r$
i l'àrea d'un cercle:
$A = \pi r^2$.

Per calcular l'àrea d'un cilindre cal sumar l'àrea lateral més l'àrea de les dues bases. L'àrea lateral és l'àrea del rectangle que té per base la longitud de la circumferència de la base i alçada h.

Aleshores, $A = A_L + 2A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2$.







El con

Els cucurutxos dels gelats o el barret d'un pallasso tenen per model geomètric un **con**.

> El **con** és un cos geomètric limitat per un cercle, que és la base, una superfície lateral corba i un vèrtex.

L'**altura** del con és el segment perpendicular que va des del vèrtex fins a la base. Un con és **recte** si l'altura va a parar al centre de la circumferència de la base.

Si considerem un triangle rectangle i el fem girar 360° al voltant d'un dels seus catets, la hipotenusa genera la superfície corba del con i l'altre catet forma el cercle de la base. La hipotenusa que genera la superfície cònica és la **generatriu** del con. El catet al voltant del qual gira el triangle rectangle és l'**altura** del con, i l'altre catet és el radi del cercle de la base, que també s'anomena **radi** del con. Evidentment, l'altura no coincideix amb la generatriu. Així, el con és el cos de revolució que s'obté quan girem un triangle rectangle al voltant d'un del seus costats.

Com pots veure a la figura, el desenvolupament pla d'un con està format per un sector circular de radi la generatriu, que és la superfície lateral del con, i pel cercle de la base.

Per calcular l'àrea d'un con cal sumar l'àrea de les superfícies que el limiten. Es pot distingir entre l'**àrea lateral**, formada pel sector circular que s'observa en el desenvolupament pla del con, el qual es pot considerar com un triangle que té de base la longitud del cercle de la base del con i que té d'altura la generatriu del con:

$$A_l = \frac{1}{2}\, 2\pi rg = \pi rg$$

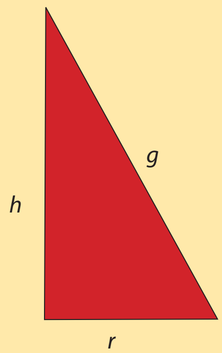
i l'**àrea total**, que és l'àrea lateral més l'àrea del cercle de la base:

$$A_t = \pi rg + \pi r^2$$

activitats resoltes

8. **La longitud de la circumferència de la base d'un con mesura 31,4 cm i l'altura del con, 12 cm. Calcula'n la generatriu.**

A la figura hem dibuixat el triangle rectangle que té per catets el radi r de la base i l'altura h del con i per hipotenusa, la generatriu g.



Ens cal calcular el radi r del con.

El podem determinar perquè coneixem la longitud L de la circumferència de la base:

$L = 2\pi r \rightarrow 31{,}4 \text{ cm} = 2 \cdot 3{,}14\, r \rightarrow 31{,}4 \text{ cm} = 6{,}28\, r$
$r = 31{,}4 \text{ cm} : 6{,}28 = 5 \text{ cm}$

Per tant, $r = 5$ cm i $h = 12$ cm. Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:

$g = \sqrt{25 \text{ cm}^2 + 144 \text{ cm}^2} = \sqrt{169 \text{ cm}^2} = 13 \text{ cm}$

La generatriu del con mesura 13 cm.

9. Calcula l'àrea total d'un cilindre i la d'un con que tenen la mateixa base de diàmetre de 10 cm i la mateixa altura de 12 cm.

En el cilindre tenim:

$r = 5$ cm i $g = h = 12$ cm

L'àrea lateral del cilindre és l'àrea d'un rectangle, de base la longitud de la circumferència de radi 5 cm i d'altura 12 cm:

$A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 376{,}8 \text{ cm}^2$

L'àrea d'una base és l'àrea d'un cercle de radi 5 cm:

$A_b = 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm})^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

L'àrea total és: $A_t = 376{,}8 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 78{,}5 \text{ cm}^2 = 533{,}8 \text{ cm}^2$

Per obtenir la generatriu del con considerem el triangle rectangle igual al de la figura de l'activitat anterior. La generatriu del con mesura 13 cm.

L'àrea lateral és la meitat del producte de longitud de la circumferència de la base, de radi 5 cm, per la generatriu.

$A_l = 3{,}14 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 204{,}1 \text{ cm}^2$

L'àrea de la base és l'àrea d'un cercle de radi 5 cm:

$A_b = 3{,}14 \cdot (5 \text{ cm})^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

L'àrea total és: $A_t = 204{,}1 \text{ cm}^2 + 78{,}5 \text{ cm}^2 = 282{,}6 \text{ cm}^2$

Com a valor de π hem utilitzat l'aproximació $\pi = 3{,}14$.

10. Les pantalles de molts llums de peu tenen forma de tronc de con que és la figura que s'obté en tallar un con per un pla paral·lel a la base, tal com pots veure en la figura. Per calcular-ne la superfície mesurem els dos diàmetres de les bases: 30 cm i 20 cm, respectivament. Ens diuen que aquest tronc s'ha tallat a 40 cm del vèrtex d'un con d'altura 60 cm. Calcula l'àrea de la pantalla.

Podem calcular l'àrea lateral del con original i restar-li la del con sobrant per trobar l'àrea de la pantalla.

Observa els triangles semblants de la figura.

Ens cal la generatriu del con original:

$g = \sqrt{3\,600 \text{ cm}^2 + 225 \text{ cm}^2} = \sqrt{3\,825 \text{ cm}^2} = 61{,}84 \text{ cm}$

La generatriu g' del con sobrant verifica:

$\dfrac{g'}{g} = \dfrac{r'}{r} = \dfrac{10}{15} \rightarrow g' = 41{,}23 \text{ cm}$

Àrea lateral del con:

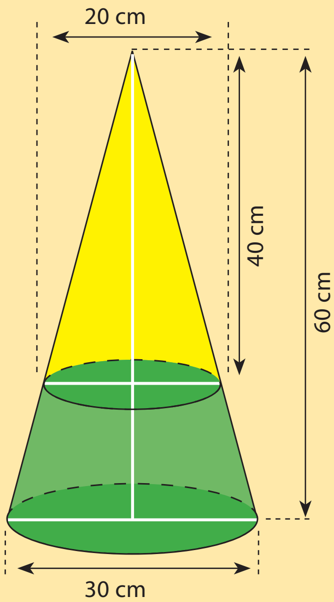
$A_l = \pi\, r\, g = 3{,}14 \cdot 15 \text{ cm} \cdot 61{,}84 \text{ cm} =$
$= 2\,912{,}66 \text{ cm}^2$

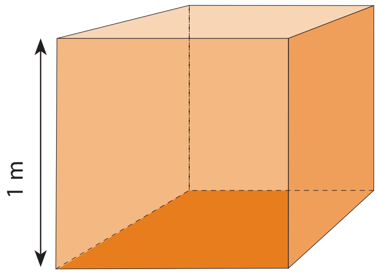
Àrea lateral del con sobrant:

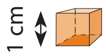
$A'_l = 3{,}14 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 41{,}22 \text{ cm} = 1\,294{,}30 \text{ cm}^2$

Àrea de la pantalla:

$A_l - A'_l = 2\,912{,}66 \text{ cm}^2 - 1\,294{,}30 \text{ cm}^2 =$
$= 1\,618{,}36 \text{ cm}^2$







5. Les unitats de volum

L'espai que ocupa un cos és el seu volum. Veurem tot seguit com obtenir el volum dels cossos geomètrics. En la pràctica, la mesura del volum que ocupa un cos no es fa de manera directa. Comparar el volum d'un cos amb un altre que es pren com a unitat no és un procediment que permeti obtenir una mesura gaire exacta. El volum dels cossos es determina de manera indirecta, a partir del producte de tres longituds expressades en la mateixa unitat. La unitat fonamental de les mesures de volum és el **metre cúbic**.

Un **metre cúbic** és el volum que ocupa un cub d'un metre d'aresta.
1 metre cúbic → 1 m^3

Expressem el volum d'un cub d'1 m d'aresta en la forma següent:

$$1\text{ m} \cdot 1\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$$

El metre cúbic és una unitat massa petita per mesurar volums grans i és una unitat massa gran per mesurar volums petits. És per aquest motiu que es defineixen altres unitats de volum: els múltiples i els submúltiples del metre cúbic.

Múltiples del metre cúbic	*Submúltiples del metre cúbic*
Decàmetre cúbic → dam^3	Decímetre cúbic → dm^3
Hectòmetre cúbic → hm^3	Centímetre cúbic → cm^3
Quilòmetre cúbic → km^3	Mil·límetre cúbic → mm^3

Cadascuna d'aquestes unitats de volum es defineix amb el mateix criteri que el que hem utilitzat per definir el metre cúbic. Per exemple:

- Un centímetre cúbic és el volum que ocupa un cub d'1 cm d'aresta:

$$1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$$

- Un decàmetre cúbic és el volum que ocupa un cub d'1 dam d'aresta:

$$1\text{ dam} \cdot 1\text{ dam} \cdot 1\text{ dam} = 1\text{ dam}^3$$

Comercialment tot sovint s'escriu *cc* per indicar centímetres cúbics.

Ordenem les unitats de volum de la més gran a la més petita:

$$\text{km}^3 \quad \text{hm}^3 \quad \text{dam}^3 \quad \mathbf{m^3} \quad \text{dm}^3 \quad \text{cm}^3 \quad \text{mm}^3$$

Ordenades d'aquesta manera, podem establir l'equivalència que existeix entre cada unitat de volum i la que es troba situada a la seva dreta.

Només cal tenir en compte l'equivalència entre les unitats de longitud corresponents que ens permeten definir les unitats de volum que volem relacionar.

Per exemple:

$1\text{ m} = 10\text{ dm} \rightarrow (1\text{ m})^3 = (10\text{ dm})^3 = 1\,000\text{ dm}^3$

$$\mathbf{1\ m^3 = 1\,000\ dm^3}$$

$(1\text{ hm})^3 = (10\text{ dam})^3 = 1\,000\text{ dam}^3$

$$\mathbf{1\ hm^3 = 1\,000\ dam^3}$$

De la mateixa manera, es compleix que:

$$1\text{ km}^3 = 1\,000\text{ hm}^3 \qquad 1\text{ dam}^3 = 1\,000\text{ m}^3$$

$1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$ $\qquad$ $1\ \text{cm}^3 = 1\,000\ \text{mm}^3$

Aquestes equivalències ens permeten deduir les que hi ha entre cada unitat i la immediatament superior:

$1\ \text{hm}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{km}^3 = 0{,}001\ \text{km}^3$ $\qquad$ $1\ \text{dam}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{hm}^3 = 0{,}001\ \text{hm}^3$

$1\ \text{m}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{dam}^3 = 0{,}001\ \text{dam}^3$ $\qquad$ $1\ \text{dm}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{m}^3 = 0{,}001\ \text{m}^3$

$1\ \text{cm}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{dm}^3 = 0{,}001\ \text{dm}^3$ $\qquad$ $1\ \text{mm}^3 = \frac{1}{1\,000}\ \text{cm}^3 = 0{,}001\ \text{cm}^3$

Les unitats de volum van de 1 000 en 1 000.

Si ordenem les unitats de volum de la **més gran** a la **més petita**, cada una d'elles és 1 000 vegades més gran que la que es troba a la seva dreta, i 1 000 vegades més petita que la que es troba a la seva esquerra.

Si utilitzem les potències de base 10 podem expressar, de manera més senzilla, les equivalències entre les unitats de volum. Per exemple, expressem el volum d'1 m³ en centímetres cúbics i el volum d'1 cm³ en metres cúbics:

$1\ \text{m} = 100\ \text{cm} = 10^2\ \text{cm}$

$(1\ \text{m})^3 = (10^2\ \text{cm})^3 = 10^6\ \text{cm}^3$

$1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$

$1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3 \rightarrow 1\ \text{cm}^3 = \frac{1}{10^6}\ \text{m}^3$

Resumim les equivalències que hi ha entre les unitats de volum en l'esquema següent:

	$\cdot \frac{1}{10^3}$		$\cdot \frac{1}{10^3}$		$\cdot \frac{1}{10^3}$		$\cdot \frac{1}{10^3}$		$\cdot \frac{1}{10^3}$		$\cdot \frac{1}{10^3}$	
km³		hm³		dam³		m³		dm³		cm³		mm³
	$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$		$\cdot 10^3$	

Recorda

En un metre cúbic caben un milió de centímetres cúbics.

activitats resoltes

11. **Transforma aquestes mesures de volum en la unitat que s'indica:**

a) 0,15 dam³ → m³ $\qquad$ **b) 3 500 dm³ → hm³**

a) Expressem l'equivalència 1 dam³ = 10³ m³ en la forma $\frac{10^3\ \text{m}^3}{1\ \text{dam}^3}$:

$0{,}15\ \text{dam}^3 = 0{,}15\ \text{dam}^3 \cdot \frac{10^3\ \text{m}^3}{1\ \text{dam}^3} = 150\ \text{m}^3$

b) L'equivalència entre 1 dm³ i 1 hm³ l'expressem en la forma $\frac{1\ \text{hm}^3}{10^9\ \text{dm}^3}$, ja que 1 hm³ = 10⁹ dm³:

$3\,500\ \text{dm}^3 = 3\,500\ \text{dm}^3 \cdot \frac{1\ \text{hm}^3}{10^9\ \text{dm}^3} = 0{,}0000035\ \text{hm}^3$

12. **Quants cubs d'1 cm d'aresta caben en 1 m³? I en 1 km³?**

Un cub d'1 cm d'aresta té un volum d'1 cm³. Les equivalències són :

$1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$ i $1\ \text{km}^3 = 10^{15}\ \text{cm}^3$

Així, en 1 m³ caben un milió de centímetres cúbics i en 1 km³ caben mil bilions de centímetres cúbics.

6. Expressions complexa i incomplexa de la mesura d'un volum

Igual que succeeix amb les altres magnituds, la mesura d'un mateix volum es pot expressar de dues maneres diferents: en forma **complexa**, quan s'utilitza més d'una unitat, i en forma **incomplexa**, si només se'n fa servir una.

Si ens indiquen que el volum d'una piscina és de 2 dam³ 34 m³ 565 dm³, ens donen el seu volum en forma complexa. Podem expressar aquest volum en metres cúbics? Si ho aconseguim, tindrem l'expressió en forma incomplexa del mateix volum. Per fer-ho podem expressar cada un dels volums parcials en metres cúbics i després sumar-ne els resultats:

$$2\ \text{dam}^3 = 2\ \text{dam}^3 \cdot \frac{10^3\ \text{m}^3}{1\ \text{dam}^3} = 2\,000\ \text{m}^3$$

$$34\ \text{m}^3$$

$$565\ \text{dm}^3 = 565\ \text{dm}^3 \cdot \frac{1\ \text{m}^3}{10^3\ \text{dm}^3} = 0{,}565\ \text{m}^3$$

$$2\,000\ \text{m}^3 + 34\ \text{m}^3 + 0{,}565\ \text{m}^3 = 2\,034{,}565\ \text{m}^3$$

Per tant, 2 dam³ 34 m³ 565 dm³ equivalen a 2 034,565 m³.

Per expressar en forma complexa la mesura d'un volum donada en forma incomplexa cal tenir en compte que a cada unitat de volum li corresponen tres xifres del nombre que n'expressa la mesura.

Fixa't que cada tres xifres del nombre que expressa la mesura del volum en forma incomplexa, corresponen a una sola unitat de volum. Lògicament, la xifra de les unitats, la de les desenes i la de les centenes sempre corresponen a la unitat en què s'expressa el volum, en aquest cas, el metre cúbic. Les tres primeres xifres decimals són les que corresponen a la unitat situada a la dreta del metre cúbic, el decímetre cúbic.

$$2\,034{,}565\ \text{m}^3 \rightarrow \underbrace{2}_{\text{dam}^3}\ \underbrace{0\ 3\ 4}_{\text{m}^3}\ ,\ \underbrace{5\ 6\ 5}_{\text{dm}^3}$$

En definitiva, cada tres xifres consecutives, a partir de la coma, corresponen a una de les unitats de volum. Aquest fet és conseqüència que cada unitat de volum equival a 1 000 unitats de la que es troba situada a la seva dreta, quan les tenim ordenades de la més gran a la més petita.

activitats resoltes

13. Calcula i expressa el resultat en la unitat més petita:

***a*) 3 hm³ 450 m³ + 0,5 km³ 325 dam³**

***b*) 2 dam³ 25 m³ – 405 m³**

Per efectuar les operacions cal tenir en compte que les magnituds han d'estar expressades en la mateixa unitat:

a) 3 hm³ 450 m³ + 0,5 km³ 325 dam³

Expressem ara cada sumand en metres cúbics, que és la unitat més petita de l'exemple. Podem fer-ho directament tenint en compte que a cada unitat li corresponen tres xifres:

3 hm³ 450 m³ = 3 000 450 m³ i
0,5 km³ 325 dam³ = 500 325 000 m³

3 hm³ 450 m³ + 0,5 km³ 325 dam³ = 3 000 450 m³ + + 500 325 000 m³ = 503 325 450 m³

b) 2 dam³ 25 m³ – 405 m³

Expressem a continuació el minuend en metres cúbics:

2 dam³ 25 m³ = 2 025 m³

$2\ dam^3\ 25\ m^3 - 405\ m^3 = 2\,025\ m^3 - 405\ m^3 =$
$= 1\,620\ m^3$

14. **Si el volum d'un cub és 1 dam³ 20 m³, expressa en metres cúbics el volum d'un cub 50 vegades més gran.**

Expressem el volum del cub en forma incomplexa: $1\ dam^3\ 20\ m^3 = 1\,020\ m^3$.

El volum d'un cub 50 vegades més gran és:

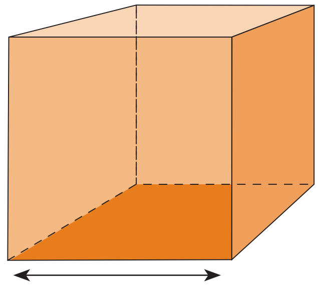
$50 \cdot 1\,020\ m^3 = 51\,000\ m^3$

7. El volum dels cossos geomètrics

Fins ara ens hem referit al volum de diferents cubs que tenen per aresta una unitat de longitud. Per exemple:

El volum V d'un cub d'1 cm d'aresta és:

$$V = 1\ cm \cdot 1\ cm \cdot 1\ cm = 1\ cm^3$$

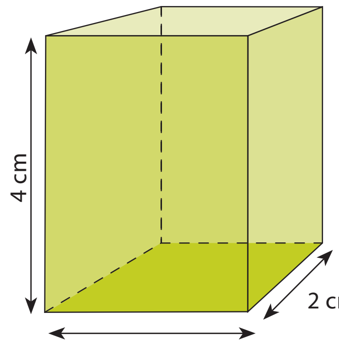


Si el cub de la figura té 4 cm d'aresta, quants cubs d'1 cm³ hi caben? Aquesta pregunta es contesta calculant el volum V del cub expressat en centímetres cúbics:

$$V = 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 4\ cm = (4\ cm)^3 = 64\ cm^3$$

Podem generalitzar aquest procediment:

El **volum d'un cub d'aresta** a es calcula elevant al cub la longitud d'aquesta aresta: $V = a^3$.



Les dimensions de l'ortòedre de la figura són 3 cm per 2 cm i per 4 cm. Quant mesura el seu volum?

Si prenem com a base el rectangle que fa 3 cm per 2 cm, l'altura de l'ortòedre mesura 4 cm.

Observa que sobre la base s'hi poden col·locar $3 \cdot 2 = 6$ cubs d'1 cm³ de volum. Aquest número 6 coincideix amb el que expressa l'àrea de la base de l'ortòedre $3\ cm \cdot 2\ cm = 6\ cm^2$.

Si l'altura de l'ortòedre és de 4 cm, podem situar-hi quatre capes de cubs d'1 cm³, com la de la base.

Per tant, a l'ortòedre hi caben $6 \cdot 4 = 24$ cubs d'1 cm³, és a dir, el seu volum és de 24 cm³.

Hem calculat el volum V de l'ortòedre multiplicant-ne les tres dimensions:

$$V = 3\ cm \cdot 2\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^3$$

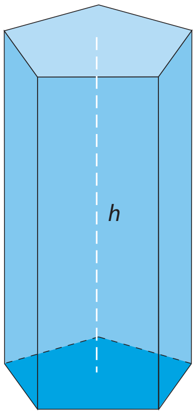
D'una manera general, podem dir:

Per calcular el **volum d'un ortòedre** n'hi ha prou a multiplicar-ne les tres dimensions a, b i c expressades en la mateixa unitat de longitud.

$$V = a\,b\,c$$

Fixa't que el producte ab indica l'**àrea de la base** de l'ortòedre i c, l'**altura**.

Un volum sempre es calcula a partir de la multiplicació de tres longituds expressades en la mateixa unitat. La unitat de longitud que s'utilitza determina la unitat amb què cal expressar el volum que es vol calcular.

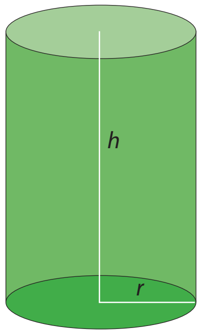


Volum de prismes i cilindres

El resultat que hem obtingut en el càlcul del volum d'un ortòedre es pot aplicar per calcular el volum de qualsevol prisma regular. Per tant, també podem calcular el volum d'un prisma regular multiplicant-ne l'àrea de la base per l'altura.

El volum d'un **prisma regular** es calcula multiplicant l'àrea de la base A_b per l'altura h: $\boldsymbol{V = A_b\, h}$.

Ja saps que un cercle es pot considerar com un polígon regular de molts costats. Per tant, podem entendre un cilindre recte com un prisma regular la base del qual és un cercle.



L'altura h i la generatriu g d'un cilindre recte són iguals. El volum d'un cilindre també es pot expressar per: $V = \pi r^2 g$.

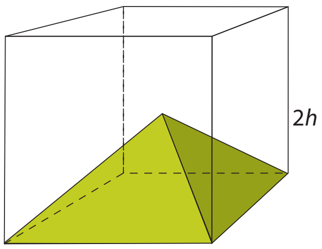
El volum d'un **cilindre** es calcula multiplicant l'àrea de la base per l'altura. Si r representa el radi del cilindre i h l'altura, el volum del cilindre s'expressa per:

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$$

Volum de piràmides i cons

Per calcular el volum d'una piràmide regular ho farem a partir del volum d'un cub.

Considerem un cub d'aresta a i les sis piràmides regulars de base cadascuna de les cares del cub i d'altura, la meitat de l'altura del cub, és a dir, $h = \frac{a}{2}$. Evidentment, la suma dels volums de les sis piràmides és igual al volum del cub. O el que és el mateix, el volum d'una d'aquestes piràmides, com la que pots veure a la figura, és una sisena part del volum del cub.



Per tant:

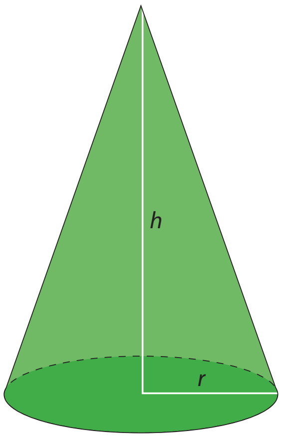
- Volum del cub: $V_c = a^3 = a^2\, a = a^2\, 2h$
- Volum de cada piràmide: $V_p = \frac{1}{6}\, a^3 = \frac{1}{6}\, a^2\, 2h = \frac{1}{3}\, a^2 h$

Observa que a^2 representa l'àrea de la base de cada piràmide i h, l'altura d'aquesta piràmide. És a dir, el volum de cada piràmide és la tercera part del producte de l'àrea de la base per l'altura. Aquest resultat es pot generalitzar per a qualsevol piràmide regular.

El **volum d'una piràmide regular** és igual a la tercera part del producte de l'àrea de la base per l'altura i s'expressa per:

$$V = \frac{1}{3} A_b\, h$$

Tenint en compte que un con es pot considerar com una piràmide regular que té per base un cercle, el volum d'un con es pot calcular de la mateixa manera que el volum d'una piràmide.



Recorda

L'altura de la piràmide no coincideix amb l'aresta lateral, i l'altura del con tampoc no coincideix amb la generatriu.

El **volum d'un con** de radi r i altura h és igual a la tercera part del producte de l'àrea de la base per l'altura i s'expressa per:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

activitats resoltes

15. Calcula el volum d'un ortòedre de dimensions 0,5 m, 15 dm i 120 cm. Expressa'n el resultat en decímetres cúbics.

Hem vist que el volum de l'ortòedre s'expressa per:

$V = abc$

on a, b i c són les tres dimensions de l'ortòedre.

Com que les tres longituds han d'estar expressades en la mateixa unitat i ens demanen el volum en decímetres cúbics, les expressarem en decímetres.

Fixa't que la propietat associativa de la multiplicació ens permet assignar a cada dimensió de l'ortòedre la lletra que vulguem. Per exemple, podem anomenar:

$a = 0{,}5 \text{ m} = 5 \text{ dm}$

$b = 15 \text{ dm}$

$c = 120 \text{ cm} = 12 \text{ dm}$

El volum de l'ortòedre és:

$V = abc = 5 \text{ dm} \cdot 15 \text{ dm} \cdot 12 \text{ dm} = 900 \text{ dm}^3$

16. L'àrea de la base d'un cilindre és 25 π dm² i la generatriu és el doble del radi. Calcula'n el volum:

La generatriu és igual que l'altura del cilindre recte i en aquest cas és el doble del radi de la base. Calculem aquest radi i també l'altura:

$25\ \pi \text{dm}^2 = \pi r^2 \rightarrow r^2 = 25 \text{ dm}^2 \rightarrow r = 5 \text{ dm}$ i $h = g = 10 \text{ dm}$

$V = \pi r^2 h \rightarrow V = 25\ \pi \text{ dm}^2 \cdot 10 \text{ dm} = 250\ \pi \text{ dm}^3$

Podem donar el volum en funció de π o donar una aproximació utilitzant $\pi = 3{,}14$:

$V = 250 \cdot 3{,}14 \text{ dm}^3 = 785 \text{ dm}^3$

17. Calcula el volum d'un con d'altura 8 cm i de generatriu 10 cm.

Ens falta el radi de la base del con. Cal recordar que la generatriu és la hipotenusa d'un triangle rectangle en el qual els catets són l'altura i el radi de la base: $g^2 = h^2 + r^2$.

$r = \sqrt{100 \text{ cm}^2 - 64 \text{ cm}^2} = \sqrt{36 \text{ cm}^2} = 6 \text{ cm}$

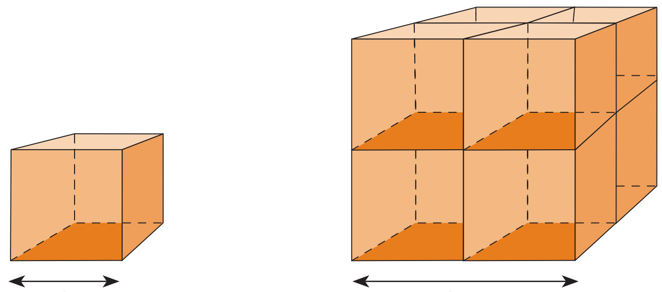
Volum del con: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow$

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 301{,}44 \text{ cm}^3$

El volum del con és $301{,}44 \text{ cm}^3$.

8. La semblança i el volum

Considerem un cub d'aresta $c = 1$ dm. El seu volum és $V = c^3 = 1$ dm^3. Si doblem la longitud de l'aresta, obtenim un cub de volum doble? L'aresta del nou cub és $c' = 2$ dm. El seu volum és $V' = (2 \text{ dm})^3 = 8$ dm^3. El volum obtingut no és el doble, sinó que és 8 vegades més gran.



Tots els cubs són semblants. Podem fer aquesta afirmació si considerem que per a cada dos cubs d'arestes c i c' sempre és possible trobar un nombre k tal que $c' = k \cdot c$. El nombre k és la **raó de semblança** dels dos cubs considerats.

Expressem-ne els volums:

$$V = c^3$$

$$V' = c'^3 = (kc)^3 = k^3c^3 = k^3V \rightarrow V' = k^3V \rightarrow \frac{V'}{V} = k^3$$

L'última expressió posa de manifest que la raó de semblança entre els volums dels dos cubs és el cub de la raó de semblança entre les seves arestes.

Entre els dos cubs de l'exemple la raó de semblança és $k = 2$, la qual cosa vol dir que un cub té d'aresta el doble de l'altra.

La relació entre els volums respectius és: $\frac{V'}{V} = 2^3 = 8$.

Si considerem la relació inversa tenim: $\frac{V}{V'} = \frac{1}{8}$.

Cal observar, en cada cas, quina és la relació que estem considerant.

Són semblants els cossos geomètrics del mateix tipus? Per contestar aquesta pregunta cal fixar-nos en cada un d'ells.

Dos **prismes són semblants** si tenen el mateix tipus de polígon regular de la base i les altures són proporcionals als dos costats dels polígons corresponents.

Dues **piràmides són semblants** si tenen el mateix tipus de polígon regular de la base i les altures són proporcionals als dos costats dels polígons corresponents. També són semblants si es consideren els triangles formats per l'aresta lateral, l'altura i el radi de la circumferència circumscrita al polígon de la base i aquests triangles respectius són semblants.

Dos **cilindres són semblants** si els radis de les bases són proporcionals a les altures corresponents.

Dos **cons són semblants** si ho són els triangles formats per la generatriu, l'altura i el radi de la base de cada un d'ells.

Recorda

Si k és la raó de semblança de dues figures, la raó entre les respectives àrees és k^2.

Comprovada la semblança entre dos cossos geomètrics, cal recordar que en el càlcul del volum sempre intervé el producte de tres longituds. La raó entre els volums serà: $\frac{V'}{V} = k^3$ on k és la raó de semblança entre dues de les longituds corresponents.

activitats resoltes

18. **El volum d'un cub és de 64 dm³. El volum d'un altre cub és de 27 dm³. Pots establir quina és la relació entre les arestes respectives? I entre les superfícies? Pots fer-ho sense determinar la longitud de les arestes?**

Establim la relació entre els volums:

$\frac{V'}{V} = k^3 \rightarrow \frac{64\ \text{dm}^3}{27\ \text{dm}^3} = \frac{64}{27} = \frac{4^3}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = k^3 \rightarrow \frac{4}{3}$ és la relació entre les arestes respectives.

$\frac{A'}{A} = k^2 \rightarrow \frac{A'}{A} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ és la relació entre les àrees.

No ha calgut determinar la longitud de les arestes.

19. **El radi de la base d'un con és $r = 3$ cm i l'altura $h = 8$ cm. Un altre con té de radi de la base $r' = 6$ cm i d'altura $h' = 16$ cm. Són semblants els dos cons? Quina és la raó de semblança? I la raó entre els volums respectius?**

Comprovem si la raó entre els radis és igual a la raó entre les altures:

$\frac{r'}{r} = \frac{6}{3} = 2$ i $\frac{h'}{h} = \frac{16}{8} = 2$

Es verifica: $k = \frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} = 2$.

Els dos cons són semblants i la raó de semblança és $k = 2$.

La raó entre els volums és $k^3 = 2^3 = 8$.

9. El volum i la capacitat

El volum del tetrabric, que té forma d'ortòedre, interessa als treballadors del magatzem, que l'han de col·locar de manera que ocupi el mínim espai possible quan en tenen molts per emmagatzemar. Quan anem a comprar un tetrabric de llet ens interessa la llet que conté, és a dir, la seva **capacitat**: quants litres caben en aquest envàs? Segurament ho porta escrit en alguna de les cares: 1 L.

Quina relació hi ha entre el volum d'aquest bric i la seva capacitat?

Si prenem les mides del bric, podem calcular el seu volum, ja que té per model un ortòedre. Les dimensions del tetrabric són: 9,2 cm, 5,6 cm i 19,5 cm.

El seu volum és:

$V = 9{,}2\ \text{cm} \cdot 5{,}6\ \text{cm} \cdot 19{,}5\ \text{cm} = 1\,004{,}64\ \text{cm}^3$

Tenint en compte que 1 000 cm^3 = 1 dm^3, el volum aproximat d'aquest tetrabric és d'1 dm^3. Com que hi cap 1 L de llet, podem concloure que un espai d'1 dm^3 de volum té una capacitat d'1 L. El resultat que hem obtingut experimentalment és només un resultat aproximat, com a conseqüència dels errors que es produeixen en tot procés de mesura.

Un **decímetre cúbic** de volum equival a un litre de capacitat o, el que és el mateix, 1 L és la capacitat d'un cub d'1dm d'aresta:

1L = 1 dm^3

A partir d'aquesta equivalència entre capacitat i volum podem deduir:

1 kL = 1 000 L

$\mathbf{1\ m^3} = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\ L \rightarrow \mathbf{1\ kL = 1\ m^3}$

$1\ mL = \dfrac{1}{1\,000}\ L$

$1\ cm^3 = \dfrac{1}{1\,000}\ dm^3 = \dfrac{1}{1\,000}\ L \rightarrow \mathbf{1\ mL = 1\ cm^3}$

activitats resoltes

20. Expressa en decímetres cúbics el volum equivalent a cada una de les capacitats següents:

a) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **hL** ***b)*** $\mathbf{5 \cdot 10^8}$ **mL** ***c)*** **0,056 kL** ***d)*** **0,001 daL**

Expressarem cada capacitat en litres ja que 1 L = 1 dm^3.

a) $\dfrac{1}{2}\ hL \cdot \dfrac{100\ L}{1\ hL} = 50\ L = 50\ dm^3$

b) $5 \cdot 10^8\ mL \cdot \dfrac{1\ L}{10^3\ mL} = 5 \cdot 10^5\ L = 5 \cdot 10^5\ dm^3$

c) $0{,}056\ kL \cdot \dfrac{1\,000\ L}{1\ kL} = 56\ L = 56\ dm^3$

d) $0{,}001\ daL \cdot \dfrac{10\ L}{1\ daL} = 0{,}01\ L = 0{,}01\ dm^3$

21. Una cisterna per transportar líquids té forma de cilindre. Mesura 8 m de llarg i els cercles de les bases tenen un diàmetre d'1,8 m. Calcula els litres que hi caben.

Calculem el volum de la cisterna que té forma de cilindre: $V = \pi r^2 h$.

Com que ens demanen la capacitat en litres, podem expressar les longituds en decímetres per tal d'obtenir directament l'equivalència.

$r = 9$ dm i $h = 80$ dm

$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 81\ dm^2 \cdot 80\ dm = 20\,347{,}2\ dm^3$

La cisterna té una capacitat de 20 347,2 L.

Proposades

1. Observa i manipula els diferents cossos geomètrics. Compta el nombre de cares, arestes i vèrtexs de:

a) Un ortòedre
b) Una piràmide triangular regular
c) Un prisma pentagonal regular
d) Una piràmide hexagonal regular
e) Un cub o hexàedre

2. Quin és el mínim nombre de figures planes que poden formar un políedre?

3. Calcula l'àrea total d'un cub de 8 cm d'aresta.

4. El terra d'una habitació mesura 5 m per 3,5 m i l'altura d'aquesta, 2,2 m. Es volen pintar les quatre parets i el sostre amb una pintura que costa 3 € cada metre quadrat. Calcula el cost de la pintura.

5. Es construeix un dipòsit cilíndric d'uralita de 5 m de diàmetre i 3 m d'altura. La tapa es fa de doble revestiment. Quant costarà la uralita si va a 64 € el metre quadrat?

6. Hi ha prismes triangulars rectes que no són regulars? Identifica'n algun fent la descripció del triangle de la base.

7. Calcula l'àrea total d'un con de 12 cm de diàmetre i 8 cm d'altura.

8. L'aresta bàsica d'un prisma hexagonal regular mesura 8 cm i l'altura, 10 cm. Calcula'n l'àrea total.

9. Es volen construir 25 cucurutxos de cartolina de forma cònica per a les disfresses del Carnestoltes. El diàmetre de la base ha de mesurar 20 cm com a mínim i l'altura del con ha de ser de 60 cm. Calcula la superfície de cartolina mínima que es necessita.

10. En una habitació hi cap un armari de 2 m d'alt, 3 m de llarg i 65 cm de fons. Calcula la superfície de làmina de fusta que es necessita per recobrir-lo si es té en compte que la part de l'armari que dóna a la paret no es recobreix.

11. Considera dos cubs de manera que l'aresta d'un sigui el doble de la de l'altre. És cert que l'àrea del cub gran serà també el doble de l'àrea de l'altre cub? Raona la resposta. Pots considerar un exemple numèric.

12. L'aresta bàsica d'una piràmide quadrangular regular mesura 6 cm i l'altura de la piràmide, 8 cm. Calcula la longitud de l'aresta lateral.

13. Les estacions de rodalia de la Renfe s'identifiquen amb un prisma triangular regular de color vermell. Calcula quina és l'àrea total del prisma si el triangle de la base fa 80 cm de costat i l'altura del prisma és de 4 m.

14. Considera 4 cubs de 3 cm d'aresta. Apila'ls de manera que formin un altre cub i calcula'n l'àrea. Si els apiles l'un sobre l'altre, quina figura obtens? Calcula la nova àrea de la figura obtinguda.

15. Un gerro cilíndric fa 16 cm de diàmetre de la base i 25 cm d'altura. Calcula'n l'àrea total. Quants litres d'aigua hi caben?

16. El diàmetre de la base d'un con mesura 1,2 dm. Calcula la longitud de la generatriu si se sap que l'altura fa 8 cm. Identifica el triangle rectangle que determinen un radi, l'altura i una generatriu.

17. En diferents envasos de refresc es poden llegir diverses maneres d'expressar la quantitat de líquid que contenen.

En tres envasos llegim:
a) 200 cc *b*) 0,2 L *c*) 200 cm^3
Quina relació hi ha entre aquestes mesures?

18. Expressa en decímetres cúbics els següents volums:

a) 3 dam^3 12 m^3 105 dm^3 50 cm^3
b) 50 hm^3 250 m^3
c) 0,05 dam^3 0,5 m^3
d) 0,001 m^3 15 dm^3

19. Escriu en forma complexa cadascun d'aquests volums:

a) 30 045,032 m^3
b) 75,0608 dm^3
c) 80 450 030,034 cm^3
d) 0,025340170 dam^3

20. Calcula i expressa el resultat en centímetres cúbics:

a) 0,005 m^3 + 0,2 dm^3 + 1 000 mm^3
b) 45 dam^3 0,3 m^3 – 4,5 m^3 25 dm^3
c) 2,5 · 10^6 mm^3 + 0,25 · 10^6 cm^3

d) 0,025 m³ 0,65 dm³ – 2 dm³

21. Calcula els volums dels cossos que et presentem a continuació:

a) Un cub de 8 dm d'aresta.

b) Un ortòedre de dimensions 5 dm, 3 dm i 0,8 m.

c) Un prisma hexagonal regular de 6 cm d'aresta bàsica i 3 dm d'aresta lateral.

d) Un cilindre les mesures del qual són 8 cm de diàmetre i 16 cm d'altura.

22. En una ampolla de vi es llegeix: 750 cc. Quantes ampolles fan falta per tenir 6 L de vi?

23. Expressa en forma complexa la sisena part d'1 dam³.

24. Una piscina té una base rectangular de 12 m per 10 m. Si en el moment present hi ha 120 000 L d'aigua, a quina altura arriba?

25. Una habitació mesura 40 dm d'amplària per 6 m de llargària i té una altura de 21 dm. Segons aquestes dades expressa en metres cúbics el volum d'aire que hi ha en aquesta habitació.

26. Un dipòsit de gasoil per a la calefacció té forma d'ortòedre de dimensions 40 cm, 1,5 m i 1,65 m. Hi caben 1 000 L de combustible? Raona de manera matemàtica la teva resposta.

27. Calcula el volum d'un prisma hexagonal regular d'aresta bàsica 10 cm i d'altura 15 cm.

28. Un dipòsit cilíndric ha de tenir una capacitat aproximada de 2 000 L. Si la base és un cercle de 22 dm de diàmetre, quina ha de ser l'altura del dipòsit?

29. Una pastilla de vitamines té 2 cm de diàmetre i un gruix de 4 mm. Calcula el volum mínim que ocupa el tub que conté 15 pastilles. El tub ha de tenir un diàmetre com a mínim 4 mm més ample que el de les pastilles.

30. Digues quines d'aquestes equivalències són certes:

a) $1\ m^3 = 1$ kL

b) $3 \cdot 10^6$ L $= 3\ hm^3$

c) $0{,}03\ dam^3 = 3\,000$ L

d) $0{,}5$ hL $= 5\ m^3$

e) 10^9 L $= 10^6\ m^3$

f) $10^3\ m^3 = 10^6$ L

31. En Joan ha de prendre xarop per a la tos. El flascó conté 125 mL. Si cada dia ha de beure tres cullerades de xarop i a cada cullera hi caben 2,5 cm³, per a quants dies té xarop?

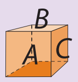
32. Dos prismes hexagonals regulars són semblants i la raó de semblança entre les altures és $k = \frac{5}{4}$. Quina és la relació entre els respectius volums?

33. Una banyera s'omple fins a una altura de 30 cm. Si les mides interiors són de 140 cm per 55 cm, quants litres d'aigua conté? Si per dutxar-se es calcula que, de mitjana, s'utilitzen 50 L d'aigua, quin és l'estalvi d'aigua que representa dutxar-se en comptes de prendre un bany?

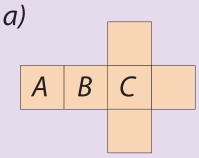
34. El costat de la base d'un prisma hexagonal regular mesura 6 cm i l'altura del prisma, 10 cm. Calcula la suma de les longituds de totes les arestes, l'àrea lateral, l'àrea total i el volum del prisma.

Reforç

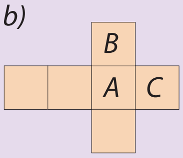
1. Quin d'aquests dos desenvolupaments plans és el que correspon al dau?



a)



b)



2. Compta les arestes que té un cub. Si la suma de les longituds de les seves arestes és de 120 cm, expressa la seva àrea en metres quadrats.

3. Manipula aquestes piràmides i completa la taula següent amb el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cada una:

Piràmide	*Cares*	*Vèrtexs*	*Arestes*
Triangular			
Quadrangular			
Pentagonal			
Hexagonal			

4. Una capsa de mistos té forma d'ortòedre. Si les dimensions són 5,5 cm, 2,5 cm i 8 cm, quant mesura la superfície total de la capsa?

5. Una piràmide té per base un rectangle. Pots afirmar que és una piràmide regular? Raona la teva resposta.

6. Un prisma quadrangular regular mesura 5 cm d'aresta bàsica i l'aresta lateral és el triple de la bàsica. Calcula'n l'àrea total.

7. Un pot de vidre cilíndric de 25 cm d'altura té de base un cercle de 10 cm de diàmetre. Calcula la superfície que ocuparà el material necessari per construir-lo.

8. Calcula l'àrea lateral d'un prisma pentagonal regular d'aresta bàsica 8 cm i aresta lateral 25 cm.

9. Quina superfície de vidre es necessita per construir una peixera que té de base un quadrat de 6 dm de costat i 40 cm d'altura?

10. Imagina un prisma que té de base un decàgon regular. Si en pots observar un, molt millor. Compta el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té.

11. Un tetrabric de suc de fruita té per base un quadrat de 8 cm de costat i una altura de 15 cm. Calcula l'àrea total d'aquesta superfície.

12. Un pot de llauna de pinya té forma de cilindre de diàmetre de la base igual a l'altura i aquesta és de 10 cm. Calcula la superfície de llauna que cal per construir-lo.

13. Una xemeneia té de base un quadrat de 85 cm de costat i una altura de 2 m. Calcula'n l'àrea de la superfície visible.

14. Ordena els volums següents del més gran al més petit:

a) 100 000 dm^3

b) 1 dam^3

c) 0,0001 hm^3

d) 95 m^3

15. L'aresta d'un cub mesura 20 dm. Calcula el seu volum i expressa'l en metres cúbics. Quants litres d'aigua hi caben?

16. Al magatzem d'una botiga han arribat 100 tetrabrics de llet. Cadascun té de dimensions 9 cm, 5,5 cm i 19 cm. Expressa en metres cúbics l'espai que ocupen en el magatzem. Aquest espai serà el mateix independentment de la manera com es col·loquin els tetrabrics?

17. Calcula els litres d'aigua que caben en un dipòsit cilíndric d'1,5 m de radi i 210 cm d'altura.

18. Expressa en litres la capacitat dels volums que s'indiquen tot seguit:

a) Un cub de 2 dm d'aresta

b) Una ampolla de 330 cm^3

c) Una llauna de refresc de 0,5 dm^3

d) Una cisterna de 750 dm^3

19. Una gota d'aigua equival aproximadament a $\frac{1}{12}$ mL. Quants litres d'aigua es perdran en un dia si una aixeta mal tancada goteja cada segon?

20. Es vol omplir una piscina de 12 m per 5 m i per 2 m. Una aixeta la pot omplir a raó de 100 L per minut. Si l'aixeta està oberta durant 10 h i la piscina té forma d'ortòedre, a quina altura arribarà l'aigua?

21. Expressa en forma complexa les mesures dels següents volums:

a) 12 340,003025 dm^3

b) 5 050,05 m^3

c) 34,0522504 dam^3

d) 0,030400506007 km^3

22. L'envàs d'un iogurt s'assembla a un prisma de base quadrada de 4,3 cm de costat i 6,6 cm d'altura. Calcula el volum de iogurt que conté. Expressa la capacitat de l'envàs en la unitat més adient.

23. Una bassa quadrada de 5 m de costat és buida. Ha plogut molt i s'han enregistrat 105 L per metre quadrat. Quants litres hi ha a la bassa després de ploure? A quina altura arriba l'aigua?

24. En una benzinera tenen buit un dipòsit de carburant que té forma d'ortòedre de dimensions 3 m, 1,5 m i 2 m. Si una cuba hi descarrega 4 500 L de gasoil, quedarà el dipòsit ple fins a la meitat?

25. En una urbanització han de contractar una cisterna d'aigua entre el veïns. Un es queda amb $\frac{1}{5}$ del seu contingut; el segon, amb $\frac{1}{4}$ del contingut i per al tercer només en queden 891 L. Quina era la capacitat de la cisterna?

Ampliació

1. En un tetrabric de llet podem amidar les mesures següents: 9,1 cm, 5,5 cm i 19,4 cm. Calcula la superfície de material que es necessita per fabricar aquest envàs, sense comptar les vores.
2. Un tetràedre és una piràmide regular limitada per quatre cares que són triangles equilàters. Si la longitud d'una de les seves arestes és 3 cm, calcula'n l'àrea total.
3. Un ortòedre té de dimensions *a*, *b* i *c*. Si reduïm cada una de les dimensions un 10 %, quin percentatge de reducció té la seva àrea?
4. Una pilota de futbol té 32 cares: 20 són hexàgons i 12 són pentàgons. Quants vèrtexs té la pilota? Quantes arestes?

5. Un cilindre i un con tenen la mateixa base i la mateixa generatriu. Expressa la relació entre les seves àrees laterals.
6. La base d'un ortòedre mesura 4 m per 2 m. Troba l'altura de l'ortòedre sabent que l'àrea lateral és igual a la suma de les àrees de les dues bases.
7. Calcula l'àrea total d'una piràmide hexagonal regular d'altura 12 cm i d'aresta bàsica 5 cm. Ajuda't dels triangles rectangles que pots considerar a la piràmide.
8. Estableix la relació entre les àrees d'un con que fa 3 cm de radi i 6 cm d'altura i el que en resulta quan es parteix per un pla paral·lel a la base a 4 cm del vèrtex. Has de tenir en compte la semblança dels triangles rectangles formats pels respectius radis, altures i generatrius.
9. Estableix la relació entre l'àrea de la base d'una piràmide i la que en resulta en tallar-la per un pla paral·lel a la base i per la meitat de l'altura.
10. Una piràmide quadrangular regular es troba enganxada per la base a un cub de 27 cm^3 de volum. Si l'altura de la piràmide és el triple de l'aresta del cub, quin és el volum de tot el cos?
11. Calcula el volum d'un prisma hexagonal regular de 10 dm d'aresta bàsica i 18 dm d'aresta lateral. Quin serà el volum d'una piràmide de la mateixa base i d'igual altura?
12. El volum de les llaunes de refresc, per regla general, sol ser de 330 cc. Quants litres de refresc contenen 100 llaunes?
13. Es vol construir un mur amb totxanes que fan 25 cm per 12 cm per 8 cm. Quantes totxanes es necessiten si el mur ha de fer 16 cm d'ample, 25 m de llarg i 2,5 m d'alt?

    Cal tenir en compte que l'argamassa o ciment ocupa $\frac{1}{11}$ del volum de les totxanes.
14. Organitzes un berenar per a 12 amics i prepares 20 llaunes de refresc de 330 cc cadascuna. Quants litres de refresc tens preparats? Si cada amic es beu $\frac{1}{2}$ L aproximadament, en tindràs prou?
15. Una ampolla de vi conté $\frac{3}{4}$ L. Calcula quantes ampolles de vidre es poden omplir amb el vi d'una tina de forma cilíndrica que fa 3 m de diàmetre i 4,5 m d'altura.
16. Les neveres se solen classificar per la capacitat, expressada en litres, que tenen. Una nevera mesura 1,8 m d'altura i la base és un quadrat de 65 cm de costat. Si totes les parets de la nevera tenen un gruix de 8 cm de mitjana, quina és la capacitat de la nevera?
17. Calcula el volum d'un con de radi 6 cm i generatriu 10 cm. Troba el volum del tronc de con que en resulta en tallar-lo per un pla paral·lel a la base i a 3 cm del vèrtex.
18. Si un cub té d'aresta *a*, escriu les expressions de la seva àrea i del seu volum. Si un altre cub té d'aresta el doble, quina és la relació entre les àrees dels dos cubs? I entre els seus volums? Pots ajudar-te amb un exemple numèric donant un valor a *a*.
19. Es calcula que cada persona necessita uns 7 m^3 d'aire per respirar. Si una aula mesura 15 m de llarg per 6 m d'ample i 2,5 m d'alt, l'aire que conté serà suficient per a 30 alumnes?
20. En dos recipients hi ha la mateixa quantitat d'oli. Si traiem 4 L del primer i 14 L del segon, queda en el primer el triple de litres que en el segon. Quants litres hi havia en cada un dels dos recipients?
21. Un octàedre regular es pot considerar com a dues piràmides quadrangulars regulars unides per les bases. Calcula el volum d'un octàedre d'aresta 4 cm.

Avaluació

Indica si és certa o falsa cada una de les afirmacions següents:

1. Un ortòedre és un políedre regular.
2. Només hi ha cinc políedres regulars.
3. Un con té dues superfícies corbes.
4. Un prisma triangular té vuit cares.
5. Un triangle escalè que gira 360° al voltant d'un costat genera un con.
6. Si tallem un con per la meitat de l'altura amb un pla paral·lel a la base, el con que en resulta té la meitat de superfície que l'original.
7. El desenvolupament pla d'un cilindre està format per un rectangle i dos cercles.
8. Una piràmide pentagonal regular té 10 arestes.
9. Un cub és un prisma quadrangular regular.

10. Un triangle rectangle, quan gira al voltant d'un catet, genera un cilindre.
11. Amb tres triangles equilàters podem formar un políedre.
12. En el desenvolupament pla d'una piràmide s'hi poden observar tants triangles isòsceles com costats té el polígon de la base.
13. Mig metre cúbic equival a 50 dm^3.
14. Un cub de 2 cm d'aresta té un volum de 2 cm^3.
15. El volum d'un prisma o d'un cilindre s'obté multiplicant l'àrea de la base per l'altura.
16. La milionèsima part d'1 m^3 és 1 mm^3.
17. El volum d'un con o una piràmide és la tercera part del producte de l'àrea de la base per l'altura.
18. 1 000 L caben en 1 m^3.
19. En un porró de vi hi cap 1 m^3.

20. 50 L és la capacitat de mig metre cúbic.