Aufgabe 4 Fruchtsäfte

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \rightarrow Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \rightarrow E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) Berechnen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

b) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden. Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.
Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.
Zeigen Sie durch eine Berechnung, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

c) Um auf Dauer einen reibungslosen Produktionsablauf in Werk B zu gewährleisten, soll das Lager nach der Renovierung einen Mindestbestand an Zwischenprodukten aufweisen.

Untersuchen und beurteilen Sie ohne Rechnungen die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

d) Zukünftig soll die Produktion im Werk A auf eine neue, sicherere Fertigungstechnik umgestellt werden. Bei dieser Technik ändern sich in Abhängigkeit von einem Technologieparameter t sowohl der Rohstoffeinsatz als auch die Fertigungskosten für die Zwischenproduktion.

Die Gesamtkosten K für die Herstellung von je 1 ME der Zwischenprodukte belaufen sich in GE

nach alter Technik auf $K_{alt} = 5000$ und

nach neuer Technik auf $K_{neu} = t^3 + 12t^2 - 144t + 5000$ mit $t \in \left]0;9\right]$.

- Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gesamtkosten K minimal werden.
- Ermitteln Sie, für welche ganzzahligen Werte von t das neue Produktionsverfahren kostengünstiger ist als das alte Verfahren, und beurteilen Sie die neue Kostensituation des Betriebes.

Aufgabe 4 Fruchtsäfte

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$C = A \cdot B$ und $C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 2a_{31}+6a_{33} & a_{31}+2a_{33} & 4a_{31}+2a_{33} \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}$ Hieraus ergibt sich: $2a_{31} + 6a_{33} = 16$ $a_{31} + 2a_{33} = 6$ $4a_{31} + 2a_{33} = 12$ Durch Auflösen von 2 Gleichungen und Einsetzen in die 3. Gleichung erhält man: $a_{31} = 2$ und $a_{33} = 2$. $C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R$ *mit* $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix}$ bedeutet $\begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11850 \\ 24300 \\ 6600 \\ 13650 \end{pmatrix}$ Zur Herstellung von 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 werden folgende Rohstoffvorräte benötigt: 11850 ME von R_1, 24300 ME von R_2, 6600 ME von R_3 und 13650 ME von R_4.	10	15	
b)	$B \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_Z$ mit $\vec{x}_Z = \begin{pmatrix} 75 \\ z_2 \\ 100 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix}$ $B \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 10 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e_1+e_2+48 \\ 8e_1+10e_2+12 \\ 6e_1+2e_2+24 \end{pmatrix}$ Hieraus ergibt sich: $\begin{aligned} 2e_1 + e_2 + 48 &= 75 \\ 8e_1 + 10e_2 + 12 &= z_2 \\ 6e_1 + 2e_2 + 24 &= 100 \end{aligned}$ oder $\begin{aligned} I\quad 2e_1 + e_2 &= 27 \\ II\quad 8e_1 + 10e_2 - z_2 &= -12 \\ III\quad 6e_1 + 2e_2 &= 76 \end{aligned}$ Aus I folgt: $e_2 = 27 - 2e_1$. Eingesetzt in III ergibt sich:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$
\begin{aligned}
6e_1 + 2(27 - 2e_1) &= 76\\
6e_1 + 54 - 4e_1 &= 76\\
+54 &= 76\,.\\
2e_1 &= 22\\
e_1 &= 11
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis in *III* eingesetzt ergibt $e_2 = 5$.

Einsetze in Gleichung *II* liefert $z_2 = 150$.

Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27\\ 8 & 10 & -1 & -12\\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right)
\xrightarrow[-III+3\cdot I]{-II+4\cdot I}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27\\ 0 & -6 & 1 & 120\\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)
\xrightarrow[II+6\cdot III]{}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 150\\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)
$$

Hieraus lässt sich ablesen: $e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$, eingesetzt in I folgt $e_1 = 11$

Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.

		I	II	III
		10	15	5

c) Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Zwischenprodukten zur Gewährleistung eines reibungslosen Produktionsablaufes in Werk B bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Herstellkosten der Vorräte.

Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu:

- bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten,

- bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an.

Jede andere (eventuell kürzere) Darstellung mit obigen Aspekten wird als richtig bewertet.

		I	II	III
c)			5	5

d) Bestimmung des Minimums von K:

$K'(t) = 3t^2 + 24t - 144$ und
$K''(t) = 6t + 24$

$K'(t) = 0\ = 0$ bedeutet

$3t^2 + 24t - 144 = 0$ bzw.

$t^2 + 8t - 48 = 0$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$t_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16+48} \Rightarrow t_1 = 4$ und $t_2 = -12$. t_2 liegt nicht in $]0;9]$, also wird nur noch t_1 betrachtet. t_1 ist mögliche Extremstelle und aus $K''(4) = 48 > 0$ folgt, dass die Gesamtkosten K für $t_1 = 4$ minimal werden. Wann ist das neue Verfahren kostengünstiger? *Der Nachweis kann z. B. über die Lösung einer Ungleichung oder mithilfe einer geeigneten Wertetabelle erfolgen.* Ungleichung $K(t) < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t + 5000 < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t < 0$ $t \cdot (t^2 + 12t - 144) < 0$ $t^2 + 12t - 144 = 0$ hat die Lösungen $t_1 \approx 7,42$ und $t_2 \approx -19,42$. Aus $t(t-7,42)(t+19,42) < 0$ folgt $0 < t < 7,42$. Da t ganzzahlig aus]0,9] gewählt werden muss, kommen also 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 in Frage. *Oder* Wertetabelle: t: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 K(t): 4869, 4768, 4703, 4680, 4705, 4784, 4923, 5128, 5405 Als ganzzahlige Werte für t kommen demnach nur 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder 7 in Frage. Die neue Kostensituation ist in Abhängigkeit von t als positiv zu bewerten, weil durch die Umstellung der Produktion auf die neue Technologie die Bandbreite für eine Kostenminderung ($0 < t < 7,42$) erheblich größer ist als für eine Kostenerhöhung ($7,42 < t \leq 9$).		25	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Wertetabelle:

t	*K(t)*
1	4869
2	4768
3	4703
4	4680
5	4705

t	*K(t)*
6	4784
7	4923
8	5128
9	5405