

Teoría – Tema 3

Teoría - 11 - unicidad de solución empleando Bolzano y Rolle

Unicidad de solución en ecuación empleando Teorema de Bolzano y Teorema de Rolle

Si utilizamos el **Teorema de Rolle de manera conjunta con el Teorema de Bolzano**, podremos **determinar el número de raíces de una ecuación (o de una función igualada a 0)**.

Si la función es continua y derivable la unión de ambos teoremas afirma que entre dos soluciones consecutivas $f(a)=f(b)=0$ existe al menos un extremo relativo $c \in (a, b) / f'(c)=0$.

Ejemplo 1 resuelto

Comprobar que $f(x)=x^3+6x+4$ tiene una única solución real en todo su dominio de definición.

La función es continua y derivable en todo \mathbb{R} por ser polinómica. En el intervalo $[-1, 0]$, donde cumple $f(-1) \cdot f(0) < 0$, podemos aplicar el Teorema de Bolzano: $\exists c \in (-1, 0) / f(c)=0$.

Veamos que esta solución es única, por **reducción al absurdo**.

Supongamos que existe una segunda solución real. Es decir, existe un segundo valor d que cumple $f(d)=0$ \rightarrow esto implicaría $f(c)=f(d)=0$ \rightarrow Por el Teorema de Rolle podríamos afirmar que $\exists \phi \in (c, d) / f'(\phi)=0$.

Si derivamos la función $\rightarrow f'(x)=3x^2+6 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=\sqrt{-2}$ \rightarrow Valor no real \rightarrow Llegamos a un absurdo \rightarrow **Hipótesis de partida falsa** \rightarrow **Existe una única solución real.**