Droites de Steiner et Simson dans un triangle

Jacques MAROT

26 mars 2019

Table des matières

1 Théorème de Simson

THÉORÈME 1 (DÉFINITION DES DROITES DE SIMSON DANS UN TRIANGLE) *Étant donné un triangle* ABC *non aplati et un point quelconque* F*, les projetés orthogonaux de ce point sur les droites* (AB), (BC) *et* (CA) *sont alignés, si et seulement si ce point est sur le cercle* $\mathscr{C}$ *circonscrit au triangle.*

À Tout point $F \in \mathscr{C}$*, le triangle* ABC *permet donc d'associer une droite appelée droite de Simson de* F *relativement à* ABC*, elle passe par les projetés orthogonaux de* F *sur les droites qui supportent les côtés du triangle.*

Si F est un sommet du triangle, il est évidemment sur le cercle circonscrit et ses projetés au nombre de deux, sont tout aussi évidemment alignés. Si F n'est pas un sommet du triangle, par projection orthogonale de ce point sur les cotés du triangle ABC, on obtient trois points distincts $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. Par relation de Chasles, on a l'égalité suivante :

$$[(A'B'),(A'C')] = [(A'B'),(A'F)] + [(A'F),(A'C')]$$

Puisque (F,C,A',B') et (F,B,A',C') sont des quadruplets de points cocycliques sur les cercles de diamètres [FC] et [FB], on en déduit :

$$[(A'B'),(A'C')] = [(CB'),(CF)] + [(BF)(BC')]$$

Étant donné que$(CB') = (CA)$ et $(BC') = (BA)$, on obtient finalement :

$$[(A'B')(A'C')] = [(CA)(CF)] - [(BA)(BF)]$$

Puisque A', B' et C' sont alignés si et seulement si $[(A'B'),(A'C')]$ est nul, on en déduit que l'alignement de ces points est équivalent à l'égalité entre les deux angles de cette dernière égalité, ce qui signifie que que F est cocyclique avec les points A, B et C. Sur la figure 1, F n'est pas sur le cercle circonscrit à ABC, A', B' et C' ne sont pas alignés ; par contre sur la figure **??**, F est sur le cercle circonscrit à ABC, A', B' et C' sont alignés.

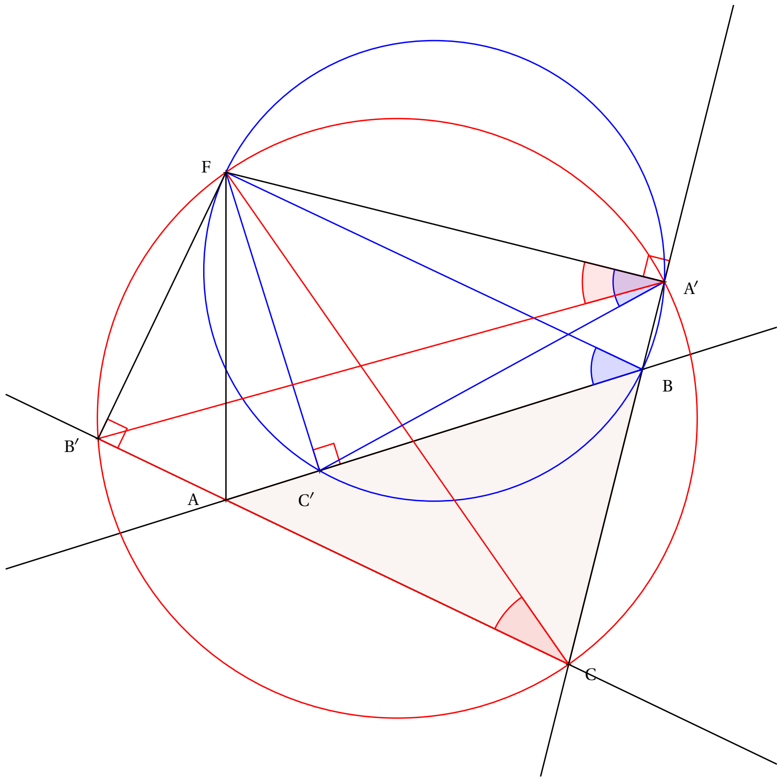

FIGURE 1 – Propriétés des projetés orthogonaux d'un point sur les côtés d'un triangle.

2 Droite de Steiner

Étant donné un point F sur le cercle circonscrit au triangle ABC, on appelle droite de Steiner de F relativement au triangle ABC, la droite homothétique de la droite de Simson par l'homothétie de centre F et rapport 2. On peut la tracer comme sur la figure **??** en construisant les deux symétriques $\mathscr{S}_{(BC)}(F) = A''$ et $\mathscr{S}_{(CA)}(F) = B''$, l'intérêt de la droite de Steiner est qu'elle passe par l'orthocentre H de ABC, quelque soit le point F sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Cela est évident lorsque le triangle est rectangle, supposons par exemple qu'il soit rectangle en son sommet C qui est alors aussi son orthocentre, par composition des deux symétries axiales par rapport à (BC) et (AC), on obtient une symétrie centrale de centre C. L'orthocentre C est alors le milieu de $[A''B'']$ car $\mathscr{S}_C(B'') = \mathscr{S}_{(BC)} \circ \mathscr{S}_{(AC)}(B'') = \mathscr{S}_{(BC)}(F) = A''$.

Si le triangle ABC n'est pas rectangle, son orthocentre H ne peut être l'un de ses sommets, on peut alors construire le cercle $\mathscr{C}_A$ circonscrit au triangle BCH et le cercle $\mathscr{C}_B$ circonscrit au triangle ACH, ils ont même diamètre que le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC. On peut le vérifier en tenant compte des égalités $\sin\widehat{AHC} = \sin\widehat{ABC}$ et $\sin\widehat{BHC} = \sin\widehat{BAC}$ qui découle des implications suivantes :

$$\text{mes}[(HA)(BC)] = \text{mes}[(HC)(BA)] = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \quad \Longrightarrow \quad [(HA),(HC)] = [(BC)(BA)]$$

$$\text{mes}[(HB)(AC)] = \text{mes}[(HC)(AB)] = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi \quad \Longrightarrow \quad [(HB)(HC)] = [(AC)(AB)]$$

le calcul des diamètres de $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ aboutit au même résultat en utilisant la relation des sinus

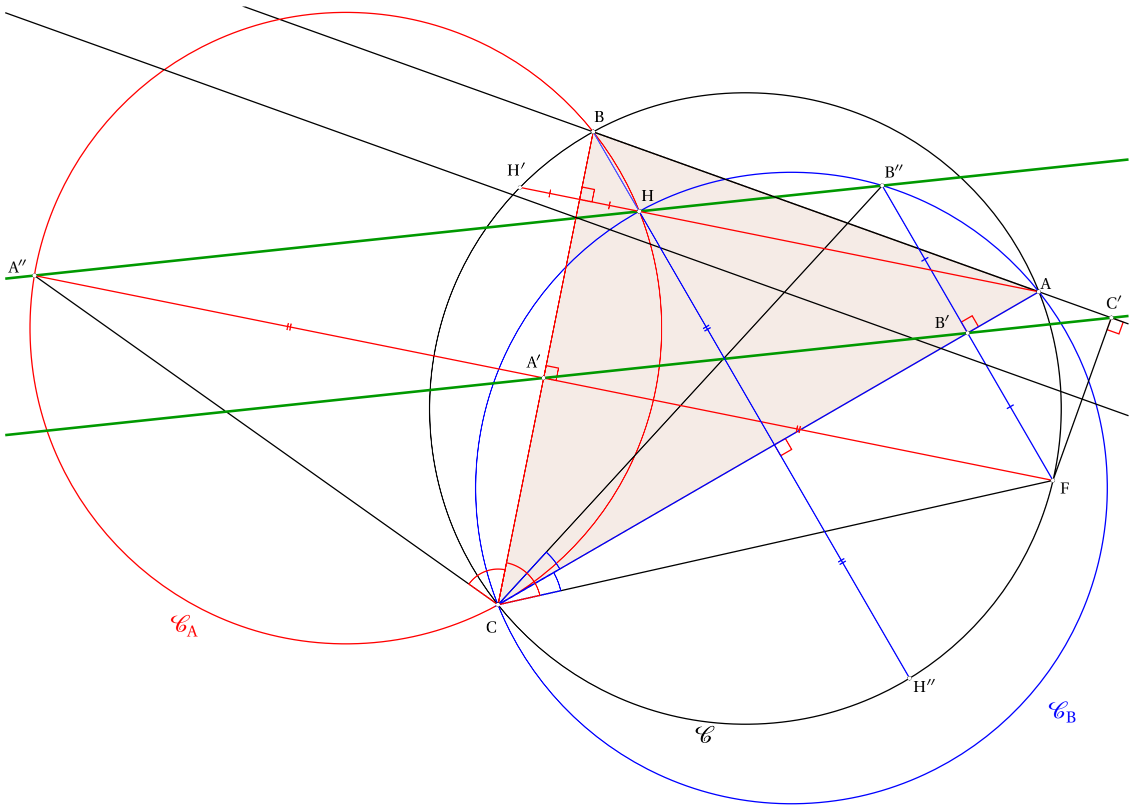

FIGURE 2 – Droite de Simson et Steiner dans un triangle

dans un triangle :

$$\frac{AC}{\sin\widehat{AHC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BHC}}$$

Or deux cercles de même diamètre ou rayon sont symétriques par rapport à la médiatrice de leurs centres ; lorsqu'ils sont sécants, cette médiatrice passe par leurs deux points d'intersection, cela suffit à justifier que $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ sont les symétriques de $\mathscr{C}$, respectivement par rapport à (BC) et (AC). On en déduit que $H \in (A''B'')$ car on a les égalités successives suivantes :

$$[(HB''),(HA'')] = [(HB''),(HC)] + [(HC),(HA'')]$$

Puisque A″ et B″, symétriques de F respectivement par rapport à (BC) et (AC) sont tels que $B'' \in \mathscr{C}_B$ et $A'' \in \mathscr{C}_A$, on en déduit :

$$[(HB''),(HA'')] = [(AB''),(AC)] + [(BC),(BA'')]$$

Par symétrie par rapport aux axes (AC) et (BC), on obtient :

$$[(HB''),(HA'')] = [(AC),(AF)] - [(BC),(BF)]$$

cet angle de droites est donc nul dès que F est sur le cercle circonscrit à ABC. Dans tous les cas de figures, on peut donc affirmer que l'orthocentre d'un triangle appartient à toute droite de Steiner d'un point quelconque de son cercle circonscrit. Au passage on peut observer que les symétriques de l'orthocentre par rapport au trois droites qui supportent les côtés du triangles, sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.