

12月5日作业

1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 6\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 6x + 8 = 0\}$, 集合 $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

(1) 求 $A \cap B$, $A \cup B$;

$$\text{解: } \because A = \{2, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore A \cap B = \{4\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

(2) 写出集合 $(\complement_U A) \cap B$ 的所有子集.

$$\text{解: } \because U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4\}$$

$$\therefore \complement_U A = \{1, 3, 5, 6\} \quad \because B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{3, 5, 6\} \quad \therefore \text{所有子集为:}$$

$$\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 5, 6\}$$

2. 已知 $x > 0, y > 0, 2x + 3y = 6$, 则 xy 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

$$xy = \frac{2x \cdot 3y}{6} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times 9 = \frac{3}{2}.$$

当且仅当 $2x = 3y$ 时 xy 取得最大值.

3. 已知函数 $f(x) = \frac{mx^2 + 2}{3x + n}$ 是奇函数, 且 $f(2) = \frac{5}{3}$.

(1) 求实数 m 和 n 的值;

$$\text{解: } \because f(-x) = -f(x), f(2) = \frac{5}{3} \quad \therefore f(-2) = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{4m+2}{n+6} = \frac{5}{3} \\ \frac{4m+2}{n-6} = -\frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = 0 \end{cases}$$

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上的最值.

$$\text{解: } \because m = 2, n = 0 \quad \therefore f(x) = \frac{2x^2 + 2}{3x}$$

设 $x_1, x_2 \in [-2, -1]$ 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1^2 + 2}{3x_1} - \frac{2x_2^2 + 2}{3x_2} = \frac{2x_1^2 x_2 + 2x_2 - 2x_2^2 x_1 - 2x_1}{3x_1 x_2}$$

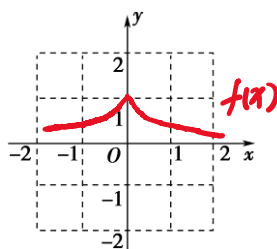
$$= \frac{2x_1 x_2 (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)}{3x_1 x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{3x_1 x_2} \quad \because x_1 < x_2, x_1 x_2 > 2$$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0 \quad \therefore f(x_1) < f(x_2) \quad \therefore f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上单调递增

$$\therefore f(x)_{\min} = f(-2) = -\frac{5}{3}, f(x)_{\max} = f(-1) = -\frac{4}{3}.$$

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

①如图，画出函数 $f(x)$ 的图象；

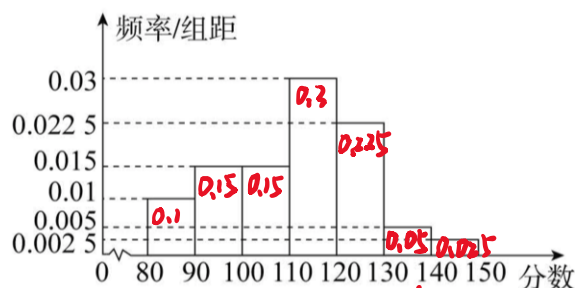


②根据图象写出 $f(x)$ 的单调区间，并写出函数的值域.

$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$;
 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[0, +\infty)$;
 $f(x)$ 的值域是 $(0, 1]$.

5. 下图是将高一某班 60 名学生参加某次数学模拟考试所得的成绩（成绩均为整数）整理后画出的频率分布直方图，则此班的模拟考试成绩的 80% 分位数是

124.44.



$\therefore$ 成绩为 120 的频率是 0.7，成绩为 130 的频率是 0.925

$\therefore$ 80% 分位数在区间 $(120, 130)$ 内.

设 $(120+x)$ 是 80% 分位数

$$0.0225x = 0.8 - 0.7$$

$$x \approx 4.44$$

$\therefore$ 考试成绩的 80% 分位数是 124.44.