Teoría – Tema 9

Teoría - 24 - Producto mixto

Producto mixto

Las matemáticas no dejan de sorprendernos. Hay operadores matemáticos para todo. Al igual que existe el sandwich mixto y la cerveza mixta, también tenemos un producto mixto de vectores.

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos.

$$Producto \;\; mixto \;\; de \;\; tres\, vectores \equiv \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Como el producto escalar sí es conmutativo, se cumple la siguiente relación:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

El resultado de un producto mixto siempre es un número, un escalar. Para obtenerlo, **primero realizamos el producto vectorial y luego el producto escalar**.

Ejemplo 1 resuelto

Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (1,0,-1)$ **,** $\vec{v} = (2,3,1)$ **y** $\vec{w} = (1,2,1)$ **.**

Por definición: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ → Primer realizo el producto vectorial y, a ese resultado, le aplico el producto escalar.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\,\hat{i} + \hat{j} + 4\,\hat{k} - (3\,\hat{k} + 2\,\hat{j} + 2\,\hat{i}) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = (1,-1,1)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (1,0,-1) \cdot (1,-1,1) = 1 - 1 = 0$$

¿Cómo entender un valor nulo en el producto mixto?

Muy sencillo, el vector $\vec{u} = (1,0,-1)$ es perpendicular al vector obtenido tras el producto vectorial $(\vec{v} \times \vec{w}) = (1,-1,1)$. Y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo.

¿Existe alguna "regla mnemotécnica" que nos permita obtener el escalar que genera el producto mixto de tres vectores? Sí. **El producto mixto de tres vectores es igual al determinante de la matriz cuadrada que se obtiene al colocar cada vector en forma de fila o en forma de columna**.

Ejemplo 2 resuelto

Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (1,0,-1)$, $\vec{v} = (2,3,1)$ y $\vec{w} = (1,2,1)$.

Aplicamos la "regla mnemotécnica" del determinante.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 4 - (-3 + 2) = -1 + 1 = 0$$