

周界豈只應用題？五聯方解難教學

李家偉 黃健德

香港教育學院小學教育榮譽學士課程 三年級

論文摘要：

在現有的數學課本的「周界」單元中，大多只列出周界的公式及其相關的應用題練習，卻較少引入提升學生解難能力的內容。因此，筆者嘗試利用五聯方進行周界的解難教學，現透過本論文分享是次之教學經驗以及探討五聯方的延伸數學問題。

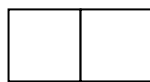
本文首先概述五聯方的定義及其與周界的關係。論文第二部份為筆者的教學經驗敘述：教學策略、其中遇到的困難、學生的反應與第二次嘗試的教學成效。第三部份是延伸探討五聯方與其他拼砌圖形的數學問題。

引言

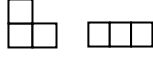
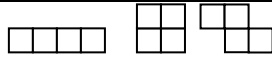
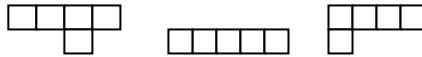
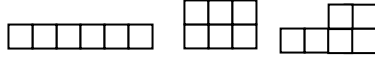
多方塊一直為趣味數學中熱門題目之一，但太多的多方塊研究均集中在多方塊密鋪拼砌等問題上。剛巧，筆者在數學教育期刊《Teaching Children Mathematics》看到一篇有關以多方塊作為主題的解難教學分享([1])，便引發起筆者嘗試以五方塊進行有關「周界」的解難教學。

何謂多方塊？

多方塊(Polyominoes) ([2])，又稱聯方圖形，即由多個大小相同的正方形以邊相連接所組成的幾何圖形。譬如，若把 2 個大小相同的正方形邊貼邊地拼合，可得出如圖一所示的圖形，稱作雙方塊(domino)。如用 n 個大小相同的正方形以邊相連接的方法拼砌，便得出了多個不同可能的 n 方塊圖形。



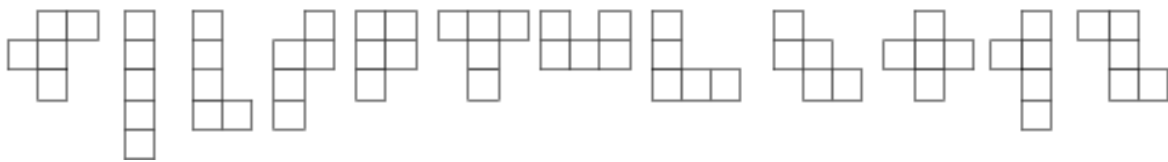
圖一 雙方塊(domino)

正方形數目	中文名稱	英文名稱	多方塊形狀(只列出部分)
1	單方塊	monomino	
2	雙方塊	domino	
3	三方塊	triominoes	
4	四方塊	tetrominoes	
5	五方塊	pentominoes	
6	六方塊	hexominoes	

表一 由 1 至 6 個正方形拼砌出的部分多方塊

若正方形數目愈多，多方塊圖形便會愈多。而我們探究的，只是所有這些圖形中，經旋轉、反射後不同的圖形。

故此根據以上定義，我們可得出 12 個經旋轉、反射後均不同的五方塊。



(Eric W. Weisstein, [3])

圖二 經旋轉、反射後均不同的五方塊

是次的教學嘗試，主要是圍繞五方塊與周界的一些問題，包括 12 個五方塊圖形周界及異同、五方塊周界與五個正方形拼合的關係及五方塊的周界與單雙數的關係。以下，筆者將略述一下其教學經驗。

筆者的教學經驗

背景

是次的教學對象為小四學生，嘗試在完成「正方形周界」課節之後進行一節(35 分鐘)的教學。是次教學目的主要為鞏固學生對周界的概念、提升學生的解難技巧與培養學生邏輯思考素質。

教學內容、策略

筆者把是次的解難教學以波利亞(Polya,[4])的解難教學四步方法入手。

理解難題

教師先提出難題「用五個大小相同的正方形，可拼砌出多少個不同的圖形？而這些圖形的周界又是多少呢？」為開始，讓學生理解難題。這包括理解題目及確定已有的資訊。故此，教師先要讓學生認識難題的內容及題目提供的資訊，如在此題的「五個」、「大小相同」、「正方形」，以對難題有正確的認識及印象。

設計解難策略

接著教師會讓學生於黑板示範拼砌，以認識學生對拼砌方法的了解。教師會指正學生的拼砌方法並帶出五方塊製作規則：邊貼邊、只計算經反射或旋轉後不相同的圖形。按學生的理解程度決定會否透過舉出例子及非例子，讓學生認識拼砌的方法。

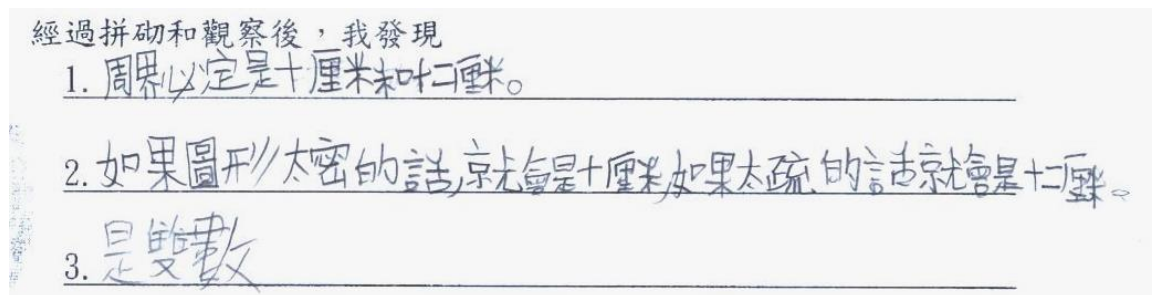
執行解難策略

學生根據制定的規則拼砌出五方塊及紀錄圖形的周界。他們運用列舉法，嘗試把所有答案列出，並根據圖形，運用剛學會的周界知識，找出 12 個五方塊的周界。

回顧

在最後的回顧中，教師先讓學生展示其五方塊圖形，核對圖形有否根據規則拼砌(旋轉及反射後有否和其他圖形相同)及正確的周界。及後，教師問學生是否有圖形周界為 10 和 12 以外的答案。在確定只有 12 個周界是 10 或 12 的圖形後，教師便開始和學生探究為甚麼有些圖形的周界是 10，有些是 12，究竟十二個圖形的拼合方法與周界有甚麼關係？

首先，教師用問題引導：先觀察周界是 10 的和周界是 12 的圖形有甚麼分別。教師鼓勵學生說出心中想法，並把它們記在黑板上，然後和學生一起想想是否正確。有部份學生說出周界是 10 的圖形比周界是 12 的圖形比較緊密。雖然他們不能運用正規數學語言說出，但已顯示學生已對問題有初步掌握，就如圖三所示：



圖三 學生對五方塊周界與拼砌關係之想法

從學生的答案中，學生未有對發現進行詳細解釋，只是直觀地提及圖形拼砌方法與周界的關係。筆者原希望和學生一起探究「周界可以是 8,9,11 等嗎？」及「周界可以是單數嗎？」。但因時間所限，未能完成，只可作為課後延伸功課。

學生表現評估

筆者在教學後把學生的工作紙收回，並與課堂觀察一併分析後，有以下發現。

首先，學生甚少回顧自己的求解過程。解難過程中該包括回顧，但學生甚少重新檢視自己做好的題目，故此出現了錯誤計算周界、用了四個正方形拼砌等等的情況。當教師在黑板和整班學生回顧時，學生又能發現錯處。

其次，從筆者的經驗及工作紙顯示，學生在面對陌生的題目時往往都顯得很被動，他們很少舉手表達自己的想法，並希望教師能作出較多的引導。另外大多數學生亦只對題目中的現象或事實感興趣並加以牢記，卻缺乏了一種對事實背後的數學概念的追求，亦未有建立一套好的解釋方式。

然而，大部份學生均表示是次教學十分有趣，拼砌的圖形很多，很新奇，並希望繼續找尋其他多方塊的周界。他們普遍認為本課能使他們對數學的興趣增加。更鼓舞的是，有些能力稍遜的學生表示對周界認識加深了：清楚了解圖形拼合時，只用計算圖形拼合後外圍部份的長度，而當正方形拼合時，愈多拼合的邊，周界便會愈少，而且每一條拼合邊代表了圖形共減去該條邊長度的 2 倍。當然，也有些學生覺得是次教學內容很難，筆者估計原因是是次教學的形式、內容及教材有別於一般數學課堂。

遇到的困難

在教學的過程中，筆者認為有需要改善的地方，以下列出一些主要困難與其改善方法：

第一，時間太短，一堂 35 分鐘的解難課只足夠進行探究五方塊與拼合方法與周界的關係部分，使探究流於表面，未能真正發揮本堂解難增潤的作用，故此，建議以兩節課來進行解難教學。而有些學生花太多時間於五方塊拼砌，並未能準確辨出旋轉及反射的影象。由於本節的重點不在拼砌技巧上，故應事先詳細解釋拼砌技巧，或先用三方塊熱身。

第二，在探究五方塊與拼合方法與周界的關係時，某些學生表示問題難於理解，而且學生的「語言能力」有限，只能說出周界較短的圖形是較緊迫的，筆者認為可用發現法，以表列方式讓學生發現關係。

第二次嘗試的教學成效

就著以上的問題，筆者把教學材料以至流程作出修訂，再作出一次教學嘗試，對象為小五、小六學生。由於他們早以熟習周界概念，故此，此課的重點為解難，時間也增長為一小時。為增加趣味，筆者首先以俄羅斯方塊(即四方塊)作為引起動機部分。透過問題「這些俄羅斯方塊圖形是用甚麼圖形、甚麼方法砌成的？」讓學生初步對多方塊的拼砌有所認識。然後才帶出難題。在教師詳細解釋拼砌技巧後，教師只給予他們相當時間拼砌及紀錄周界。與上次教學一樣，學生對拼砌方面甚有興趣，而拼砌和找周界方面的問題也已大大減少。

在工作紙方面，筆者加上了填表一項，透過具體數據，學生很容易發現拼合後周界與公共邊的數目有關：公共邊是 5 的那個圖形的周界是 10，相比起公共邊是 4 的那些圖形的周界 12 少 2。教師透過提問和學生一起思考「為甚麼公共邊多了 1，圖形的周界少了 2？」，從表中，學生也不難發現了。然後，再推廣至一般情況下，公共邊、拼合前周界、拼合後周界的關係是：

拼合後周界 = 拼合前正方形周界總和 - $2 \times$ 公共邊數目。

經過拼砌和觀察後，我發現以下資料：

圖形	砌合前周界	公共邊數目	砌合後周界	圖形的周界是 (✓)	
				雙數	單數
1	20	4	12	✓	
2	20	4	12	✓	
3	20	4	12	✓	
4	20	4	12	✓	
5	20	5	10	✓	
6	20	4	12	✓	
7	20	4	12	✓	
8	20	4	12	✓	

20 是 4 的倍數
砌合 - 公共邊 $\times 2$
4n - 公共邊 $\times 2$

圖四 公共邊數目、拼合後周界之關係圖表(學生樣本)

但當討論到「五方塊的周界為甚麼最多是 12cm」時，便有學生感到困惑。為方便解釋，教師讓學生試畫一個周界大過 12 的多方塊圖形，並提示學生從表中想想原因。

出乎筆者意料之外，學生經過一步步的提問與回答後，都得出了結論如：「五方塊的周界最多是 12cm」、「五方塊的周界一定是雙數！」、「五方塊的周界只有 10 和 12」。並能加以解釋，以下節錄了一位學生的筆記：

我的發現

公共邊的數目愈多，石切合後的周界的cm就愈少。
五方塊：石切合前的周界 - 公共邊數目 $\times 2$ = 石切合後周界
 n 方塊： $4n$ - 公共邊數目 $\times 2$ = 石切合後的 n 方塊周界
①為甚麼五方塊的周界是雙數？
因為公共邊可以是單數， $\times 2$ 之後就會由單數變成雙數，石切合前周界一定是雙數，雙數減雙數 = 雙數。

圖五 第二次教學學生的發現

由於他們數學能力較高，所以除了周界問題外，筆者也準備了一些五方塊和面積有關的問題，如「如果 12 個五方塊圖形能拼成一個矩形，那麼那個矩形的長和闊可能是多少？」，其實問題本身根本是面積及因數的問題。學生很快想到，但卻忽略了問題本身的意義，以致有些同學錯誤包括了 1×60 和 2×30 的可能性。

是次一小時的教學，能達到基本教學目標，而在解難過程裏，筆者嘗試鼓勵學生在小步上進行探索，而這個嘗試亦得到了很好的結果。最後筆者更向學生介紹更多有關五方塊的問題及遊戲資料。

總結及反思

是次以五方塊為題材的教學嘗試，筆者認為除了能配合周界作增潤課程外，還能夠為學生帶來另一種數學學習的模式和內容。筆者認為尤以當中的解難訓練、數學思考兩方面最為重要。這次富趣味性的多方塊教學嘗試中，筆者利用多方塊這課題進行多個數學範疇的探究：反射與旋轉、周界的量度、單雙數之關係、運用多個情況作出歸納、解難能力，這與現行數學科以課題為學習單位的教學法截然不同。教學透過討論、思考以至整個解難過程，讓學生學會解決問題、表達自己的想法及應用已有數學知識於難題上，而這些數學能力都是非常實用及不可或缺的。

延伸問題

多方塊的周界問題

既然五方塊組合中有 10 和 12 這兩個不同周界，那麼其他多方塊的情形又會是怎樣呢？我們能否從中推斷出 n 方塊周界的上限與下限的公式？以下，我們將嘗試去解答這問題。

周界的上限

首先，我們先考慮上限情況。顯而易見，在眾多 n 方塊組合中，以一個接一個正方形拼合而成為的長條狀圖形(記作 $1 \times n$)的周界是最長的。因為根據定義，多方塊的拼合方式規定每一個正方形最少要有一邊和另一個正方形的一邊緊貼著。這說明，運用 n 個正方形拼合時，最少有 $(n - 1)$ 條公共邊，才能符合多方塊的定義。

即是說， n 方塊的組合中，周界的上限是 $4n - 2(n - 1) = 2(n + 1)$ 。

多方塊	圖形	公共邊數目	周界
四方塊		3	10
五方塊		4	12
六方塊		5	14
七方塊		6	16
⋮	⋮	⋮	⋮
n 方塊	n 個正方形拼成一 $1 \times n$ 的圖形	$n - 1$	$4n - 2(n - 1)$ $= 2(n + 1)$

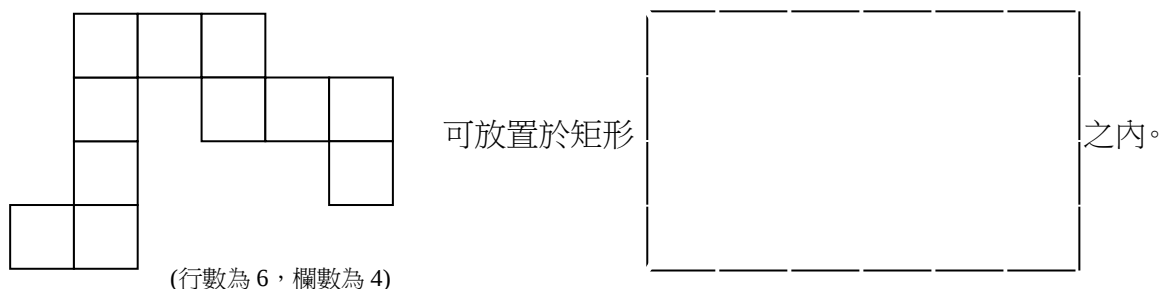
表二 多方塊的公共邊與周界關係

周界的下限

對於 n 方塊周界的下限，我們有以下說明。

事實一：每一個 n 方塊圖形都可以放置在一個長等於該 n 方塊圖形的行數及闊等於 n 方塊的欄數的矩形內。

例如：

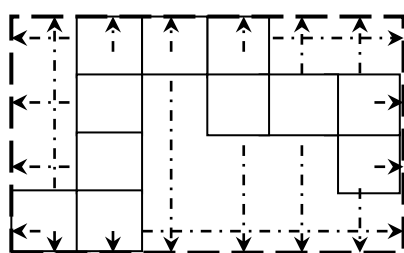


圖六

事實二：該矩形的周界比該 n 方塊圖形的周界相等或短。

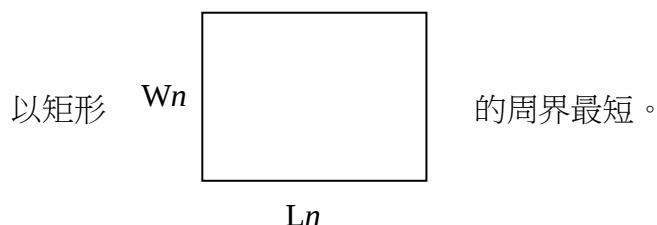
顯而易見，我們可以知道每一個 n 方塊的圖形中，每一欄中最近左方的方塊的左面邊界與最右方的方塊的右面邊界分別對應了該矩形的左面及右面邊界。而每一行中最近上方的方塊的上面邊界與最下方的方塊的下面邊界分別對應了該矩形的上面及下面邊界。因此，我們可以知道該 n 方塊的全部或部分周界對應於該矩形的全部周界。故該矩形的周界比該 n 方塊圖形的周界相等或短。

例如：



圖七

事實三：面積大於 n 平方單位而且長和闊為整體單位的矩形中，



其中

$$W_n = \begin{cases} [\sqrt{n}] + 1, & n - [\sqrt{n}]^2 > [\sqrt{n}] \\ [\sqrt{n}], & n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}] \end{cases}, \text{ 及 } L_n = \begin{cases} [\sqrt{n}] + 1, & n \neq [\sqrt{n}]^2 \\ [\sqrt{n}], & n = [\sqrt{n}]^2 \end{cases}$$

$*[n]$ ，即實數 n 的整數部分

我們知道若 n 是平方數，以邊長為 $\sqrt{n}$ 之正方形的周界必為最短。若 n 不是平方數以及 $n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}]$ ，邊長為 $[\sqrt{n}]$ 之正方形的面積會小於 n 平方單位。所以邊長為 $[\sqrt{n}] + 1$ 及 $[\sqrt{n}]$ 的矩形的面積大於 n 而且周界最短。若 n 不是平方數以及 $n - [\sqrt{n}]^2 > [\sqrt{n}]$ ，以邊長為 $[\sqrt{n}] + 1$ 及 $[\sqrt{n}]$ 的矩形的面積會小於 n 平方單位。所以邊長為 $[\sqrt{n}] + 1$ 及 $[\sqrt{n}] + 1$ 的矩形的面積大於 n 而且周界最短。

事實四：最少有一個 n 方塊圖形的周界等於矩形

Wn

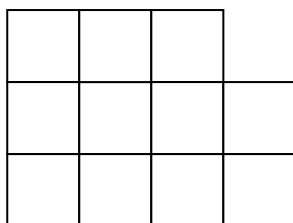


的周界。

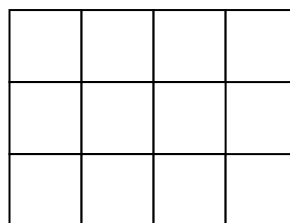
L_n

我們知道在 n 方塊中有行數與欄數分別為 Wn 和 L_n 的 n 方塊圖形。當中有一個會是成梯級形狀；而該梯級形的 n 方塊的周界符合需要條件。

例如：



圖八 梯級形的十一方塊圖形



圖九 非梯級形的十一方塊圖形

所以， n 方塊圖形周界的下限是 $2(Wn + L_n)$ 。

故此， n 方塊的組合中，周界的上限是 $4n - 2(n - 1) = 2(n + 1)$ ，

周界的下限是 $2(Wn + L_n)$ 。

$$\text{其中，} Wn = \begin{cases} [\sqrt{n}] + 1, & n - [\sqrt{n}]^2 > [\sqrt{n}] \\ [\sqrt{n}], & n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}] \end{cases}$$

$$L_n = \begin{cases} [\sqrt{n}] + 1, & n \neq [\sqrt{n}]^2 \\ [\sqrt{n}], & n = [\sqrt{n}]^2 \end{cases}。$$

參考資料

- 1 Phyllis Whitin(2004): Promoting Problem Posing Exploration: *Teaching Children Mathematics*, 11(4), 180–186.
- 2 Solomon W. Golomb(1994): *Polyominoes*, New Jersey, Princeton University Press P.3-10.
- 3 Eric W. Weisstein(1998).Polyomino – from MathWorld. Retrieved March 01, 2005, from MathWorld Web site: <http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html>
- 4 Polya, G. (1990), *How to solve it*, England: Penguin.