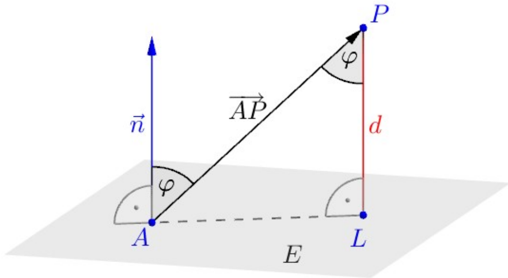
Abstand Punkt-Ebene, Hesse'sche Normalenform



$$[\vec{p} - \vec{a}] \circ \vec{n_0} = d \quad \text{mit} \quad \vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Für $P \in E$ ergibt sich $d = 0$, während $d < 0$ den Fall beschreibt, wenn P entgegen der Orientierung von $\vec{n}$ liegt.
Im allgemeinen interessiert als Abstand zwischen Punkt und Ebene nur eine Länge ≥ 0, weswegen die linke Seite der Formel üblicherweise in Betragsstriche gesetzt wird.

Herleitung: Wegen $\vec{n} \mid\mid \overline{PL}$ sind die eingezeichneten Winkel φ zueinander Wechselwinkel. Es gilt im rechtwinkligen Dreieck ALP zunächst:

$$cos\varphi = \frac{d}{|\overrightarrow{AP}|}$$

Zwischen $\overrightarrow{AP}$ und $\vec{n}$ hingegen gilt die Skalarprodukt-Formel:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \vec{n}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{n}|}$$

Gleichsetzen und Multiplikation mit $|\overrightarrow{AP}| \neq 0$ liefert obige Formel.

Beispiel: $P(2/3/4)$, Ebene $E:\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$, gesucht: Abstand von P zu E.

Lösung: Der Koordinatengleichung der Ebene entnimmt man durch Ablesen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und durch geschicktes Einsetzen einen Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $(0) + 2 \cdot (1) + 5 \cdot (0) = 2$

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

$$d = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \right] \circ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{n_0}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{2 + 4 + 20}{\sqrt{30}} \approx 4,75$$

Dahlmannschule Bad Segeberg