

Beweis der Sätze der Dualität

Sätze der Dualität

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zwei Variablen, deren Summe konstant ist, also $a + b = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$. Dann ist das Produkt $a \cdot b$ genau dann maximal, wenn $a = b = \frac{c}{2}$.
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zwei Variablen, deren Produkt konstant ist, also $a \cdot b = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$. Dann ist die Summe $a + b$ genau dann minimal, wenn $a = b = \sqrt{c}$.

Beweis:

Wir verwenden für den Beweis der Sätze der Dualität die bereits hergeleitete

Mittelungleichung: Für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$, wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $a = b$.

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zwei Variablen, deren Summe konstant ist, also $a + b = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$.

Dann gilt für das Produkt unter der Verwendung der (quadrierten) Mittelungleichung:

$$a \cdot b \leq \frac{(a+b)^2}{4} \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } a = b.$$

Also bildet der Ausdruck $\frac{(a+b)^2}{4}$ ein Maximum für das Produkt $a \cdot b$, dass genau dann erreicht wird, wenn $a = b$.

Da $a + b = c$ gilt, wird das Maximum des Produkts genau dann erreicht, wenn

$$a = b = \frac{c}{2}. \quad \square$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zwei Variablen, deren Produkt konstant ist, also $a \cdot b = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$.

Dann gilt für die Summe unter der Verwendung der (etwas umgeformten)

Mittelungleichung:

$$a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } a = b.$$

Also bildet der Ausdruck $2\sqrt{a \cdot b}$ ein Minimum für die Summe $a + b$, dass genau dann erreicht wird, wenn $a = b$.

Da $a \cdot b = c$ gilt, wird das Minimum der Summe genau dann erreicht, wenn

$$a = b = \sqrt{c}. \quad \square$$

Bemerkung:

Die Sätze der Dualität können unter Verwendung der allgemeinen Mittelungleichung auch auf n Variablen zu den folgenden Sätzen verallgemeinert werden:

1. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ n Variablen, deren Summe konstant ist, also $a_1 + a_2 + \dots + a_n = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$. Dann ist das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ genau dann maximal, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{c}{n}$.
2. Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ n Variablen, deren Produkt konstant ist, also $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = c$ mit $c \in \mathbb{R}_0^+$. Dann ist die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ genau dann minimal, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt[n]{c}$.

Die beiden bewiesenen Sätze machen Aussagen über Extremwerte bestimmter Funktionstypen.

Der erste Satz gibt Auskunft über das Maximum einer Funktion bestehend aus Faktoren, während der zweite Satz Auskunft über das Minimum einer Funktion gibt, die aus Summanden besteht.

Beispiel für die direkte Anwendung der Sätze:

- a) Welches Rechteck besitzt unter jenen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt?

Seien a und b die beiden Seitenlängen des Rechtecks und U der konstante Umfang.

Es gilt also $2(a + b) = U$ bzw. $a + b = \frac{U}{2}$, also ist die Summe der beiden Seiten konstant.

Gesucht ist das Maximum für den Flächeninhalt $A(a, b) = a \cdot b$.

Einsetzen der (umgeformten) Nebenbedingung $b = \frac{U}{2} - a$ in die Zielfunktion ergibt

$$A(a) = a \cdot \left(\frac{U}{2} - a\right).$$

Da die Summe der beiden Faktoren a und $\frac{U}{2} - a$ konstant ist, da $a + \left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}$, kann der erste Satz der Dualität verwendet werden.

Demzufolge ist der Flächeninhalt genau dann maximal, wenn $a = \frac{U}{2} - a$, also $a = \frac{U}{4}$.

Für die Seite b erhalten wir durch die Nebenbedingung $b = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \frac{U}{4}$.

Also sind die Seiten gleich lang und es handelt sich bei dem Rechteck um ein Quadrat.

b) Welches Rechteck besitzt unter jenen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt den kleinsten Umfang?

Seien a und b die beiden Seitenlängen des Rechtecks und A der konstante Flächeninhalt.

Es gilt also $a \cdot b = A$.

Gesucht ist das Minimum für den Umfang $U(a, b) = 2a + 2b$.

Einsetzen der (umgeformten) Nebenbedingung $b = \frac{A}{a}$ in die Zielfunktion, ergibt

$$U(a) = 2a + 2\frac{A}{a}.$$

Für das Produkt der zwei Summanden $2a$ und $2\frac{A}{a}$ gilt $2a \cdot 2\frac{A}{a} = 4A$.

Also ist das Produkt der zwei Summanden konstant und der zweite Satz der Dualität anwendbar.

Demzufolge ist der Umfang genau dann minimal, wenn $2a = 2\frac{A}{a}$, also $a^2 = A$ bzw.

$$a = \sqrt{A}.$$

Für die zweite Seite ergibt sich mit Hilfe der Nebenbedingung $b = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Also sind die Seiten gleich lang und es handelt sich auch bei diesem Rechteck um ein Quadrat.