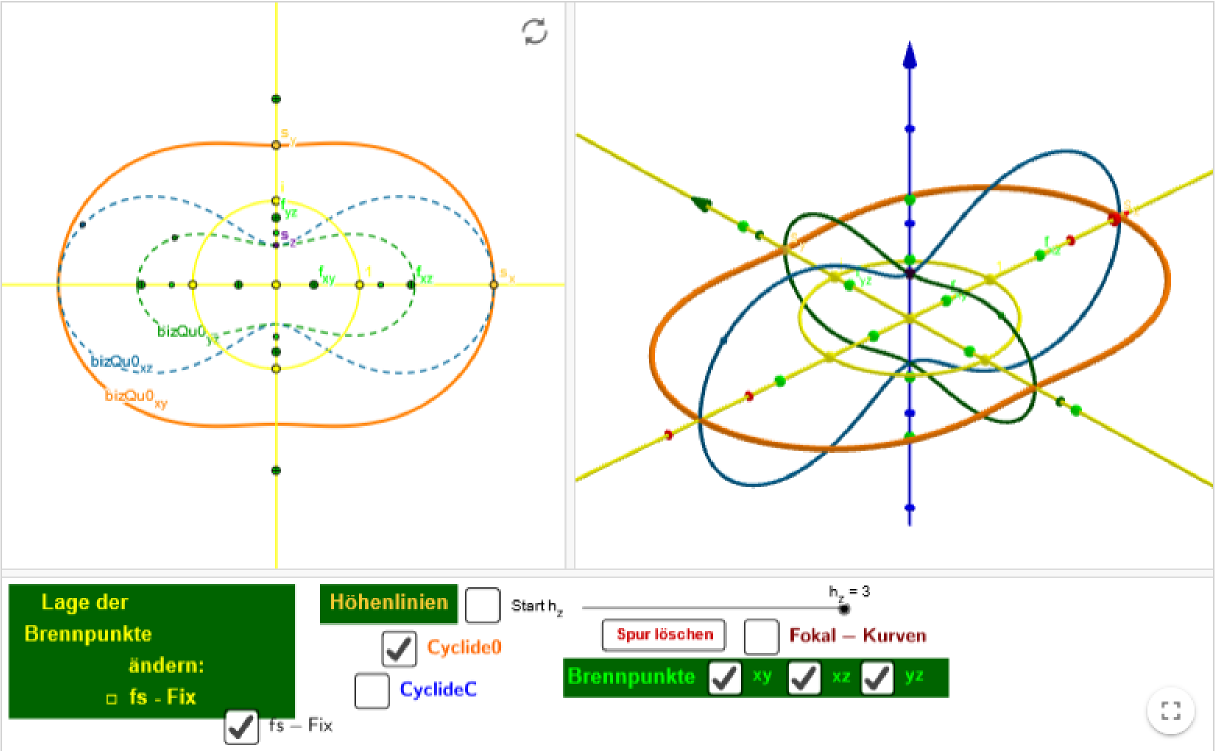
Darboux Cycliden: Die Formeln 2

Autor: Walter Füchte

1-teilige Darboux Cycliden



Diese Aktivität ist eine Seite des geogebra-books [conics bicircular-quartics Darboux-cyclides] (April 2021)
verbessert 25.04.

1-teilige ***Darboux Cycliden*** besitzen in ***Normalform*** eine implizite Gleichung des Typs:

- $(x^2+y^2+z^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 - 2 \cdot C_z \cdot z^2 - 1 = 0$

mit reellen A_x, B_y, C_z. Die ***Cycliden*** sind ***symmetrisch*** zu den 3 Koordinatenebenen, die für die Berechnungen wieder als komplexe Zahlenebenen $\mathbb{C}$ betrachtet werden.
Man vergleiche dazu die Seite $\hookrightarrow$ ***Darboux Cycliden: die Formeln*** über 2-teilige ***Cycliden***.
Auch 1-teilige ***Cycliden*** treten immer zusammen mit einer Schar ***konfokaler Cycliden*** auf.
Die Schnitte mit den ***Koordinatenebenen*** sind 1-teilige ***bizirkulare Quartiken***, deren ***Brennpunkte*** auf den Achsen

(*) Quadrupel des Typs $f, -f, \frac{i}{f}, -\frac{i}{f}$ bilden mit $f \in \mathbb{R}$.

Die Scheitelpunkte auf den Achsen:

Aus $A_x = \frac{1}{2} \cdot \left({s_x}^2 - \frac{1}{{s_x}^2} \right)$ berechnet man die ***Scheitelpunkte*** $s_x := \pm\sqrt{A_x + \sqrt{{A_x}^2+1}}$,

$\pm s_y := \pm i \cdot \sqrt{B_y + \sqrt{{B_y}^2+1}}$,

und mit $s_z := \sqrt{C_z + \sqrt{{C_z}^2+1}}$ die ***Scheitelpunkte*** $(0,0,\pm s_z)$ auf der z-Achse.

Die Brennpunkte:

Mit $Q_{xy} := \frac{A_x \cdot B_y + 1}{B_y - A_x} = \frac{1}{2} \cdot \left({f_{xy}}^2 - \frac{1}{{f_{xy}}^2} \right)$ berechnet man beispielsweise: $f_{xy} := \pm\sqrt{Q_{xy} \pm \sqrt{{Q_{xy}}^2 + 1}}$, siehe **(*).**
Auf jeder der 3 Achsen liegen je 2 der ***Brennpunkte*** der zugehörigen *Koordinatenebenen*;
insgesamt sind es wieder **3*4 *Brennpunkte***.
Umgekehrt berechnet man aus dem ***Scheitel*** s_x und dem ***Brennpunkt*** f_{xy} die Koeffizienten A_x, Q_{xy} und damit $B_y := \frac{1 + Q_{xy} \cdot A_x}{Q_{xy} - A_x}$.

Konfokale Cycliden:

Sind zu einer ***Darboux Cyclide*** die Koeffizienten Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz} und damit die ***Brennpunkte*** berechnet, so erhält man durch Vorgabe eines ***Scheitelpunktes***, beispielsweise sC_x auf der x -Achse, die Koeffizienten der ***konfokalen Cycliden***:

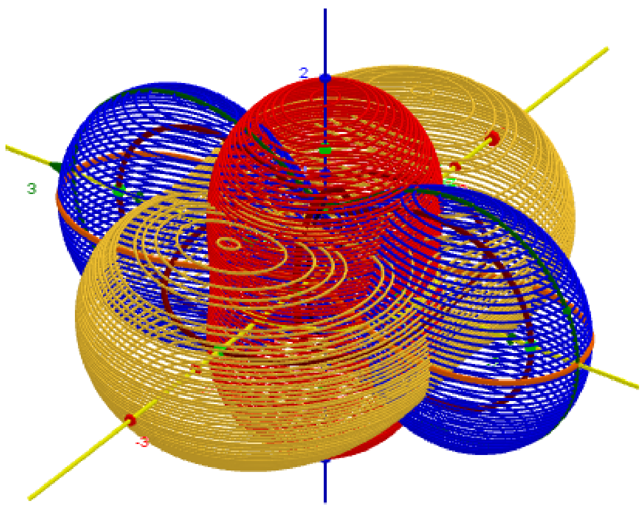
- $AC_x := \frac{1}{2} \cdot \left({sC_x}^2 - \frac{1}{{sC_x}^2} \right)$
- $BC_y := \frac{AC_x \cdot Q_{xy} + 1}{Q_{xy} - AC_x}$ und $CC_z := \frac{AC_x \cdot Q_{xz} + 1}{Q_{xz} - AC_x}$.

Die ***Fokal-Kurven*** berechnet man, indem einer der ***anderen Brennpunkte*** auf einer Achse als ***Scheitelpunkt*** gewählt wird:
beispielsweise wähle man in der xy -Ebene zu den ***Brennpunkten*** f_{xy} (s.o) den ***Scheitelpunkt*** f_{xz} auf der x -Achse.
Nähert sich ein ***Scheitelpunkt*** einem solchen ***Brennpunkt***, so verflacht die zugehörige ***Cyclide*** zu einem Flächenstück mit der zugehörigen ***Fokal-Kurve*** als Randkurve.

Bemerkung(en):

Sofern keine ***Rotationssymmetrie*** vorliegt, existieren 3 verschiedene ***Fokal-Kurven***, in jeder ***Koordinatenebene*** je eine.
Jede ***Cyclide*** einer solchen Schar von ***konfokalen Darboux Cycliden*** wird von einer der ***Fokal-Kurven*** in 4 Punkten geschnitten.
Diese Punkte sind die "***Brennpunkte***" auf der Fläche. Auf ***Cycliden*** diesen Typs existieren 2 ***Kreisscharen***.
Die ***Kreise*** einer dieser ***Kreisscharen*** beginnen in einem der ***Fokal-Kurven***-Schnittpunkte und verschwinden in einem "gegenüberliegenden ***Brennpunkt***" vergleiche ↪ circles on darboux cyclides 1-sheet.
Auf 1-teiligen ***Darboux Cycliden*** gibt es nicht mehr als 2 verschiedene ***Kreisscharen***, und daher existieren auf diesen Flächen ***keine 6-Eck-Netze*** aus ***Kreisen***!

konfokale
1-teilige
Darboux Cycliden



erstellt mit obigem Applet