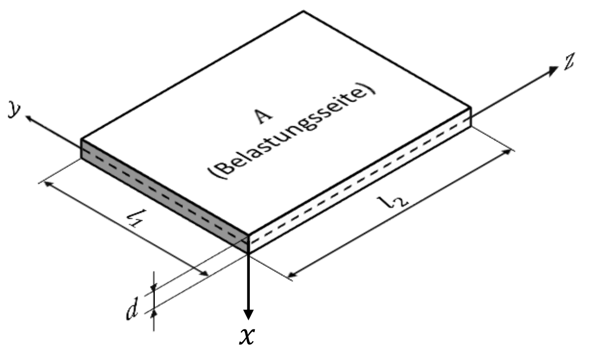
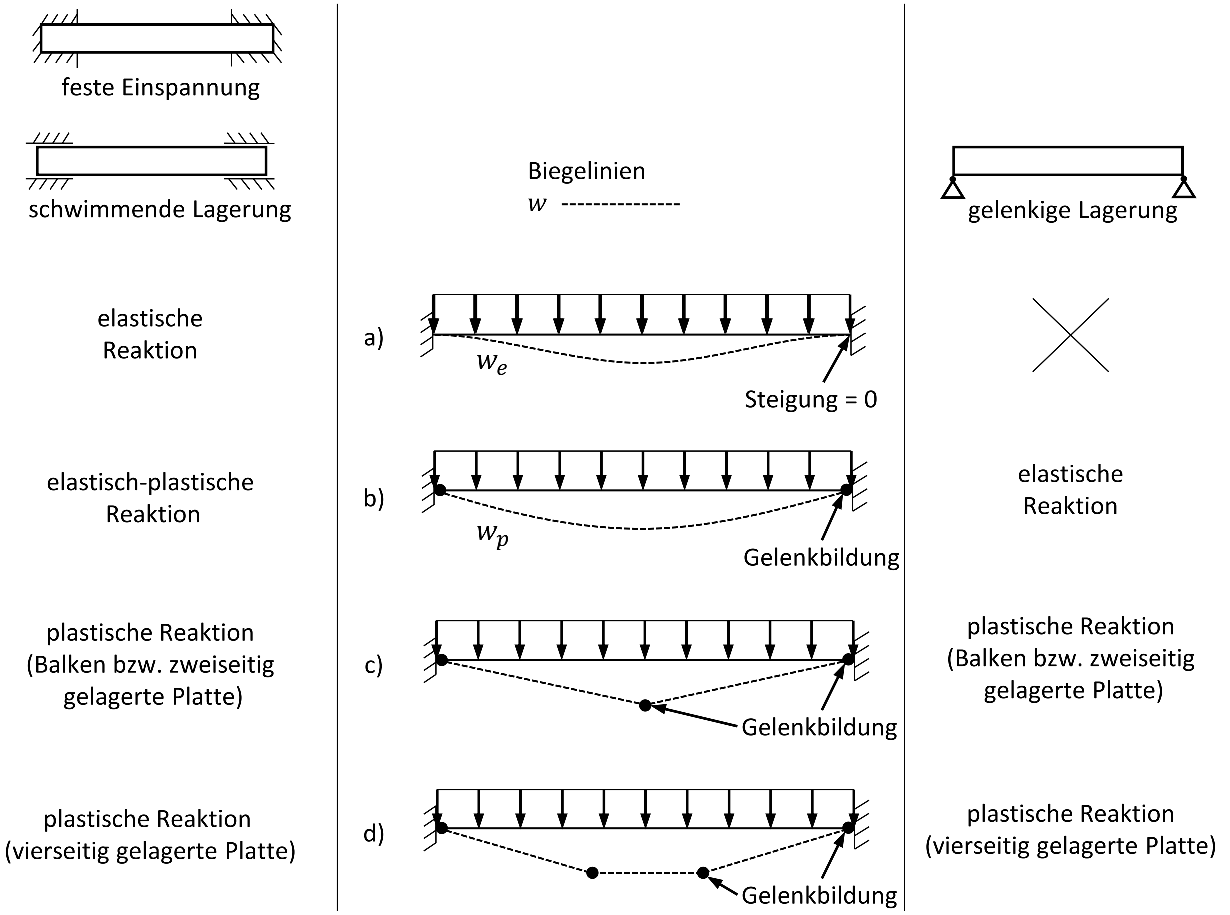
Schwerpunktberechnung einer Platte mit homogen verteilter Dichte im verformten Zustand



$$m = \frac{\varrho}{V} = konst$$
$$V = Ad = l_1 l_2 d$$
$$\varrho(x, y, z) = konst.$$

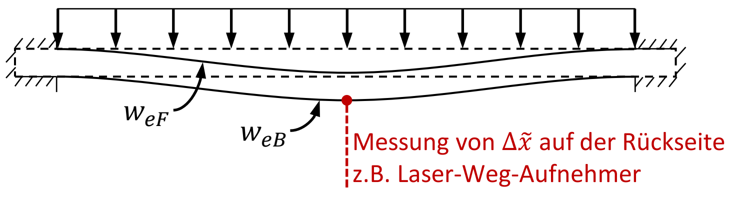
m ..*Masse*
ϱ ..*Dichte*

Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass x die Belastungsrichtung darstellt. Die Achsen y und z liegen auf den neutralen Fasern der unverformten Platte.
In Anlehnung an BIGGS werden für die u.a. Lagerungen die Biegelinien $w(y)$ bzw. $w(z)$ und $w(y, z)$ angenommen.
Die Biegelinien entsprechen der Verformung der neutralen Faser.



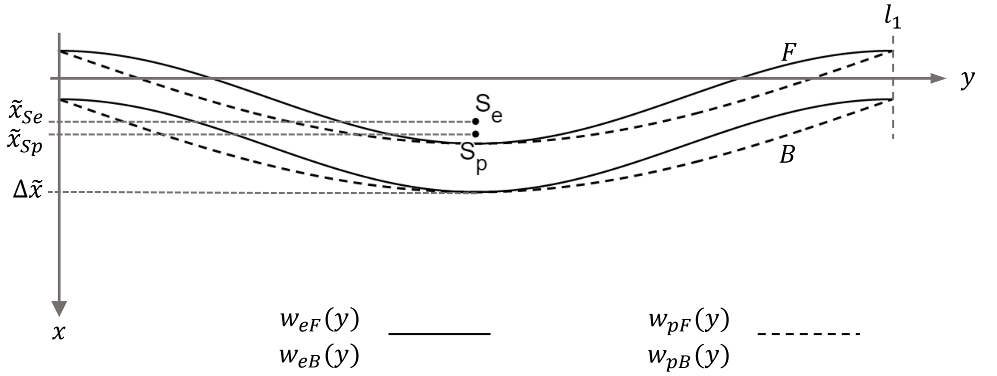
Die Biegelinien bei elastischer Reaktion werden im Folgenden mit w_e, die Biegelinien bei elasto-plastischer Reaktion mit w_p bezeichnet. In der weiteren Berechnung werden nur die Fälle a) und b) betrachtet, da eine Belastung des Prüflings im elastischen Bereich bereits alle Informationen zur Bestimmung der Federkonstante des Ersatzmassenschwingersystems liefert.
Es wird weiterhin angenommen, dass die Dicke d der Platte auch im verformten Zustand an jeder Stelle gleich bleibt: $\mathrm{d}(y, z, t) = konst.$

Die Biegelinien für die Verformung der Belastungsseite (Front) werden mit w_{eF} bzw. w_{pF} indiziert, die der Rückseite (Back) mit w_{eB} bzw. w_{pB}. z.B. bei fester Einspannung, elastisches Verhalten:



Für die Biegelinien sind folgende Modelle üblich:

1. Zweidimensionaler Fall, d.h. zweiseitig gelagerte Platte oder Balken (y durch z ersetzbar)



$$w_{eF}(y) = \Delta\tilde{x}\ sin^2\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) - \frac{d}{2}$$

$$w_{eB}(y) = \Delta\tilde{x}\ sin^2\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \frac{d}{2}$$

selten und nahezu deckungsgleich (BIGGS, S. 206):

$$w_{eF2}(y) = \Delta\tilde{x}\frac{16}{5l_1^4}(l_1^3y - 2l_1y^3 + y^4) - \frac{d}{2}$$

$$w_{eB2}(y) = \Delta\tilde{x}\frac{16}{5l_1^4}(l_1^3y - 2l_1y^3 + y^4) + \frac{d}{2}$$

$$w_{pF}(y) = \Delta\tilde{x}\ sin\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) - \frac{d}{2}$$

$$w_{pB}(y) = \Delta\tilde{x}\ sin\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) + \frac{d}{2}$$

Die y-Koordinate des Flächenschwerpunkts S ergibt sich durch Symmetrie zu $y_S = \frac{l_1}{2}$ bzw. zu $z_S = \frac{l_2}{2}$.
Die x-Koordinate des Flächenschwerpunkts $\tilde{x}_S$ zwischen den jeweiligen Kurven w_F und w_B errechnet sich mit

$$\tilde{x}_S = \frac{\int_0^l \int_{w_F}^{w_B} x\,dxdy}{\int_0^l \int_{w_F}^{w_B} dxdy},\ \text{wobei}\ \int_0^l \int_{w_F}^{w_B} dxdy = dl \text{ mit } l = l_1 \vee l_2$$

$$\tilde{x}_{Se} = \frac{1}{dl_1}\int_0^{l_1}\int_{w_{eF}}^{w_{eB}} x\,dxdy = \frac{1}{dl_2}\int_0^{l_2}\int_{w_{eF}}^{w_{eB}} x\,dxdz$$

$$\tilde{x}_{Sp} = \frac{1}{dl_1}\int_0^{l_1}\int_{w_{pF}}^{w_{pB}} x\,dxdy = \frac{1}{dl_2}\int_0^{l_2}\int_{w_{pF}}^{w_{pB}} x\,dxdz$$

Dadurch ergeben sich einfache Umrechnungsfaktoren von der Messung auf der Rückseite zur Messung der Schwerpunktkoordinate.

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{x}_{Se} = \frac{1}{2}\Delta\tilde{x} \quad \text{und} \quad \tilde{x}_{Sp} = \frac{2}{\pi}\Delta\tilde{x} \qquad\qquad S_e = \left(\frac{l}{2}, x_{Se}\right); S_p = \left(\frac{l}{2}, x_{Sp}\right)$$

2. Dreidimensionaler Fall, vierseitig gelagerte Platte

$$w_{eF}(y,z) = \Delta\tilde{x}\, sin^2\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) sin^2\left(\frac{\pi}{l_2}z\right) - \frac{d}{2}$$

$$w_{eB}(y,z) = \Delta\tilde{x}\, sin^2\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) sin^2\left(\frac{\pi}{l_2}z\right) + \frac{d}{2}$$

$$w_{pF}(y,z) = \Delta\tilde{x}\, sin\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) sin\left(\frac{\pi}{l_2}z\right) - \frac{d}{2}$$

$$w_{pB}(y,z) = \Delta\tilde{x}\, sin\left(\frac{\pi}{l_1}y\right) sin\left(\frac{\pi}{l_2}z\right) + \frac{d}{2}$$

Die y- und z-Koordinate des Flächenschwerpunkts $S = (\tilde{x}_S, y_S, z_S)$ ergeben sich durch Symmetrie zu $y_S = \frac{l_1}{2}$ und $z_S = \frac{l_2}{2}$.
Die x-Koordinate des Flächenschwerpunkts $\tilde{x}_S$ zwischen den jeweiligen Kurven w_F und w_B errechnet sich mit

$$\tilde{x}_S = \frac{\int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\int_{w_F}^{w_B} x\;dxdy}{\int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\int_{w_F}^{w_B} dxdy} \quad \text{, wobei} \int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\int_{w_F}^{w_B} dxdy\; = d\, l_1\, l_2$$

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{x}_{Se} = \frac{1}{4}\Delta\tilde{x} \quad \text{und} \quad \tilde{x}_{Sp} = \frac{4}{\pi^2}\Delta\tilde{x} \qquad\qquad S_e = \left(\frac{l}{2}, x_{Se}\right); S_p = \left(\frac{l}{2}, x_{Sp}\right)$$