UNIVERSIDAD ICESI Escuela de Ciencias de la Educación Departamento de Matemáticas y Estadística	Hoja de trabajo No. 2	Temas: Análisis de soluciones de EDO de primer orden.
Metodología: Actividad matemática. Explorar, formular preguntas, conjeturar y validar.	Recursos: Lápiz, papel, GeoGebra, Recursos Educativos Abiertos (REA).	Fecha: Semana 5. ____________ ______________________

ENFOQUE DE COMPETENCIAS
¿Cómo pongo en juego los conocimientos que he adquirido?
¿Qué problemas puedo resolver con esos conocimientos?

INSTRUCCIONES.
Atienda la presentación preliminar del profesor, que le dará pautas para desarrollar el plan de trabajo.

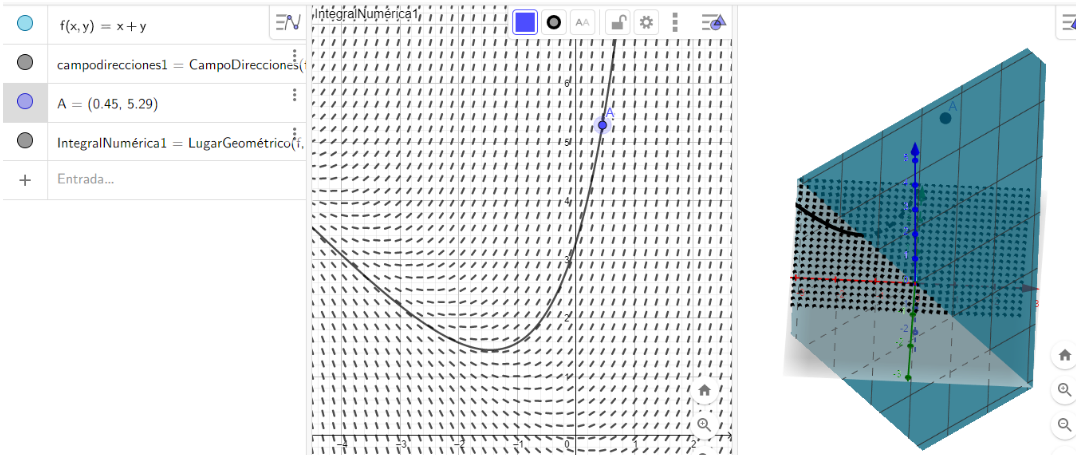
MOTIVACIÓN.

La mayoría de los fenómenos naturales y culturales involucran procesos de covariación entre diferentes tipos de variables. Dependiendo de la información que podamos obtener de estos fenómenos y de los parámetros que podamos controlar experimentalmente, las ecuaciones diferenciales nos aportarán modelos útiles para explicar los comportamientos observados y predecir, con ciertas restricciones, la evolución futura de esos procesos.

Necesitaremos primero ahondar en algunos aspectos técnicos sobre la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Isoclinas y curvas solución

1. Construcción en GeoGebra de un *campo de direcciones* para analizar soluciones de problemas de valor inicial del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x,y), \;\; y(x_0) = y_0$.
    a. Abra GeoGebra con sus vistas algebraica y gráfica habilitadas.
    b. Escriba en la entrada $f(x,y) = x + y$
    c. Habilite la herramienta *campo de direcciones* escribiendo en la entrada: $\mathbf{CampoDirecciones}(< \mathbf{f} >)$
    d. Inserte un punto arbitrario en el campo, con la herramienta **Punto**
    e. Habilite la herramienta *lugar geométrico* escribiendo en la entrada: $\mathbf{LugarGeom\acute{e}trico}(< \mathbf{f} >, < \mathbf{A} >)$.



f. Describa lo que observa en la vista gráfica.

R/ En la imagen se puede observar un campo de isoclinas con las curvas solución de la función f(x,y)= x+y. En la imagen podemos ver la curva solución para un punto arbitrario A de coordenadas (0.45, 5.29)

2. Analice los PVI del texto (14, 15 y 16, sección 1.3):

14. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}; \quad y(0) = 0$

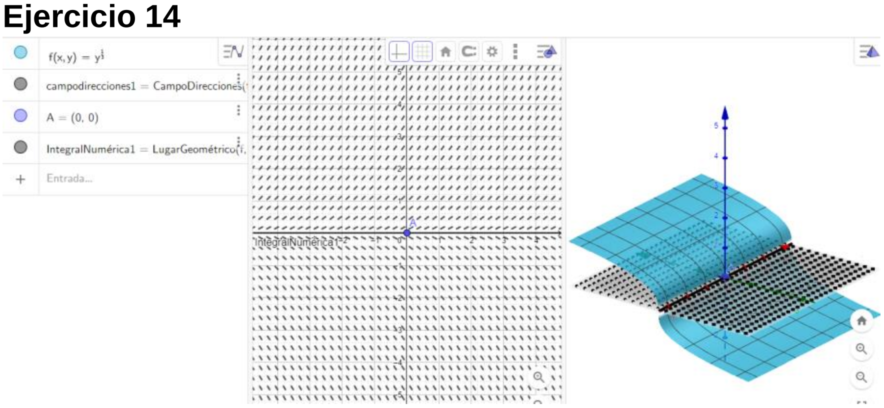
15. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 2$

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 1$

R/

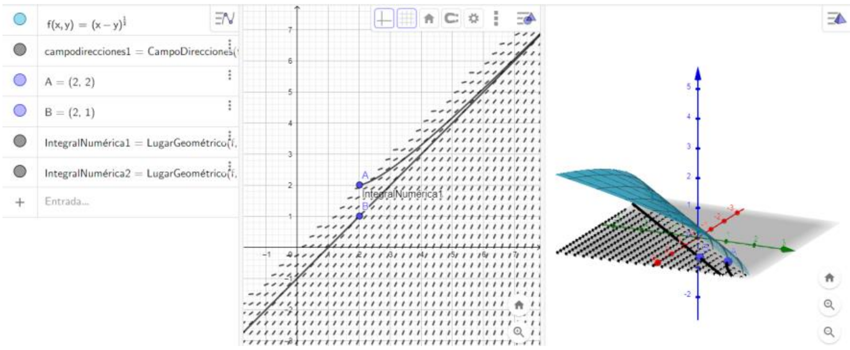
a. Utilizando el *campo de direcciones*.

Ejercicio 14



Analizando el ejercicio con el campo de direcciones podemos decir que no se encuentra una solución única para el PVI que se nos presenta, ya que nos señala todo el eje x como solución.

Ejercicio 15 (punto A) y 16 (punto B)

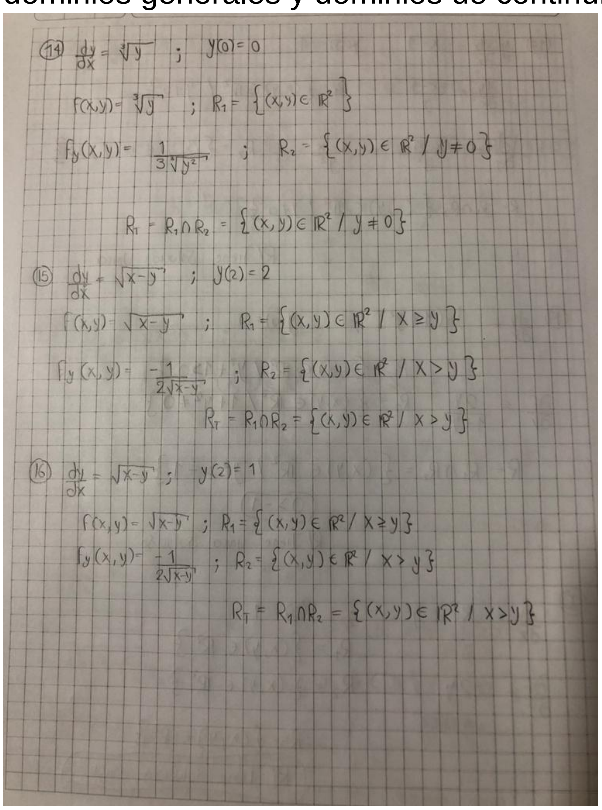


En el ejercicio **15**, ya que no se logra ver una curva completa, podría inferir que en este punto (A=(2,2)) la función no es continua, y por ende podría decir que no se garantiza una solución única.

En el ejercicio **16**, se logra ver una curva completa, que pasa por el punto dado (B=(2,1)), por lo que podemos decir que aquí la función es continua, por lo que se garantiza una solución única.

b. Utilizando el teorema de existencia y unicidad:

i. En cada caso identifique las funciones $f(x,y)$ y $f_y(x,y)$, junto con sus dominios generales y dominios de continuidad.



(14) $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$; $y(0) = 0$

$f(x,y) = \sqrt[3]{y}$; $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$f_y(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$; $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

$R_T = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 2$

$f(x,y) = \sqrt{x-y}$; $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y\}$

$f_y(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$; $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$

$R_T = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$

(16) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 1$

$f(x,y) = \sqrt{x-y}$; $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y\}$

$f_y(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$; $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$

$R_T = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$

ii. Establezca las respectivas conclusiones sobre existencia y unicidad.

14. No se garantiza una única solución en el punto (0,0), ya que no cumple la condición del dominio de continuidad.
15. No se garantiza solución única en el punto (2,2) ya que no cumple con el dominio de continuidad.
16. Se garantiza solución única en el punto (2,1) ya que cumple las dos condiciones generales y de continuidad general.

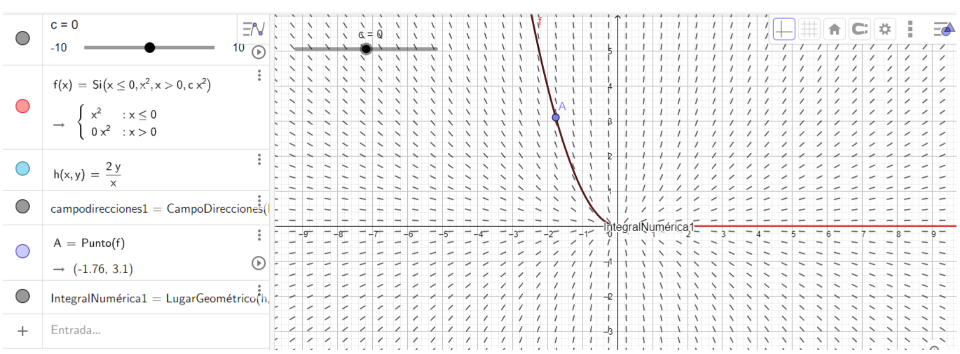
c. Comente sobre el empleo de los dos métodos de análisis: ¿se obtienen las mismas conclusiones? ¿uno de los métodos es más claro o efectivo que el otro?

Se obtiene las mismas conclusiones, pero creo que me es un poco más difícil analizar completamente el problema con la gráfica, así que de forma algebraica puedo corroborar o entender un poco mas lo que esta sucediendo con la ecuación en los puntos dados. Considero que los dos métodos son muy buenos, me siento más cómodo de forma algebraica, pero los dos juntos se complementan muy bien.

3. Considere la ecuación diferencial: $xy' = 2y$.
   a. Configure un deslizador c en el intervalo [-10,10] y construya en GeoGebra la familia de funciones a trozos:

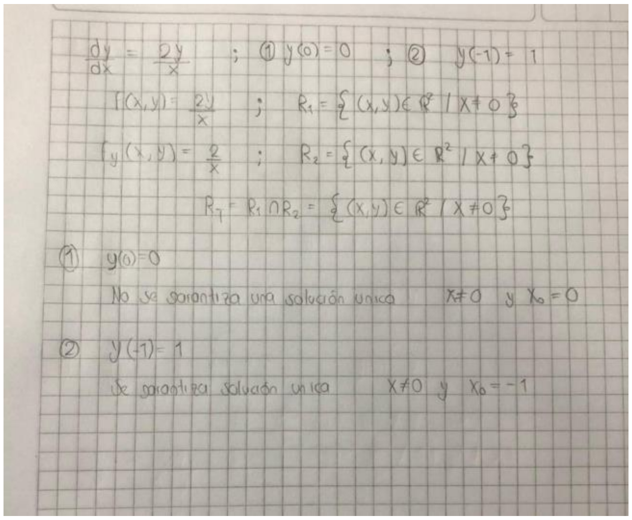
$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ cx^2, & x > 0 \end{cases}$$

   b. Muestre que para cualquier valor de la constante c, la curva correspondiente de la familia es solución de la ecuación diferencial dada.



En la imagen se puede observar el campo de direcciones de la ecuación $xy' = 2y$ y también la gráfica de la función a trozos f, en la función f se ha configurado un punto A, y a este punto se le activo el lugar geométrico con la ecuación h, dando como curva solución la función a trozos f, para cualquier valor de c.

   c. Observe que todas las curvas de la familia pasan por los puntos (0,0) y (-1,1). Analice los dos PVI (uno por cada punto) utilizando el teorema de existencia y unicidad y explique porque no es inconsistente el hecho de que haya infinitas curvas solución en cada caso.



$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$; ① $y(0)=0$; ② $y(-1)=1$

$f(x,y) = \frac{2y}{x}$; $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

$f_y(x,y) = \frac{2}{x}$; $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

$R_T = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$

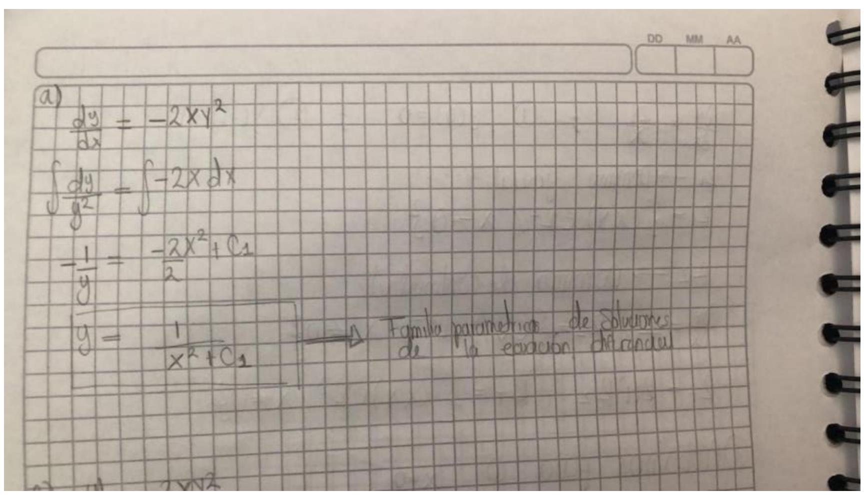
① $y(0)=0$

No se garantiza una solución única $x \neq 0$ y $x_0 = 0$

② $y(-1)=1$

Se garantiza solución única $x \neq 0$ y $x_0 = -1$

4. Considere la ecuación diferencial $y' + 2xy^2 = 0$.
   a. Encuentre una familia paramétrica de soluciones de la ecuación.



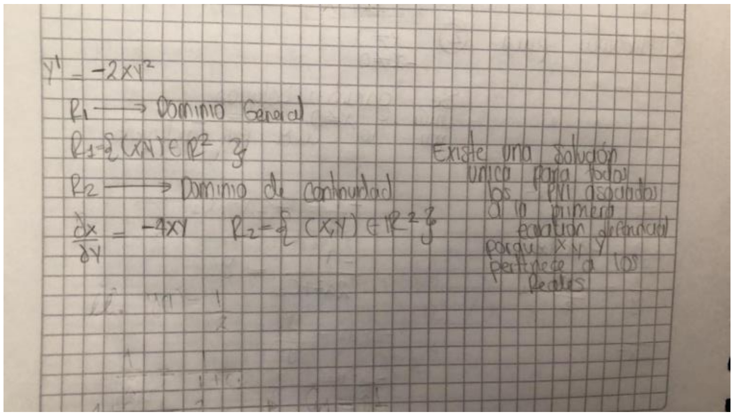
a) $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$

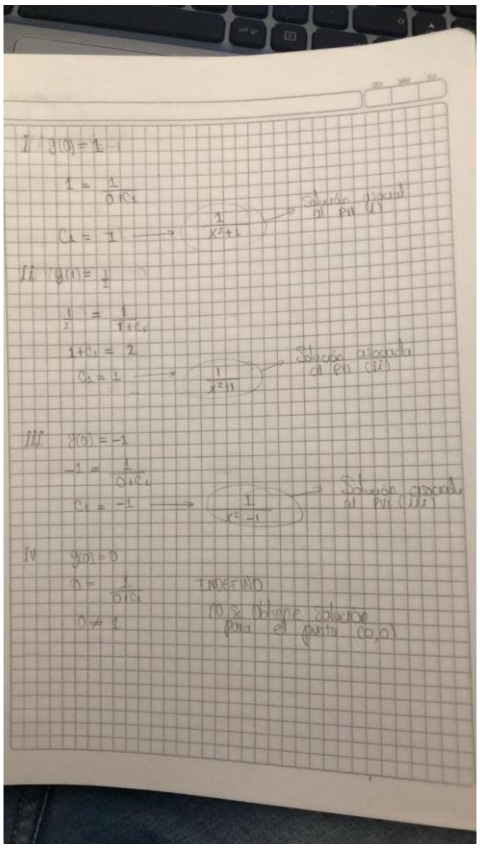
$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2x\,dx$

$-\frac{1}{y} = \frac{-2x^2}{2} + C_1$

$\boxed{y = \frac{1}{x^2 + C_1}}$ → Familia paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial

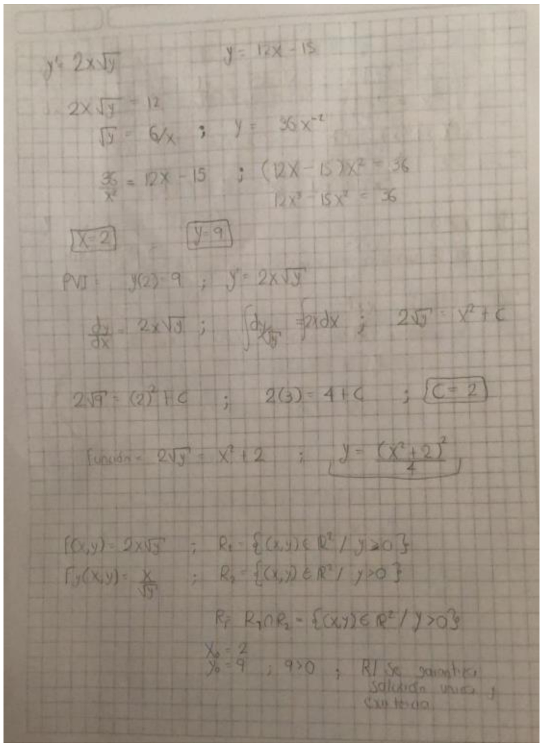
   b. Analice a priori cada uno de los siguientes PVI asociados a la ecuación, para determinar existencia y unicidad de soluciones. Luego resuelva cada PVI y valide sus análisis: $i)\ y(0) = 1.$ $ii)\ y(1) = \frac{1}{2}.$ $iii)\ y(0) = -1.$ $iv)\ y(0) = 0.$





<u>Resolución y formulación de problemas</u>

1. Considere el siguiente problema: "*determinar si existe una función* $y = y(x)$ *que cumpla con las condiciones siguientes: i) la derivada en todo punto* (x, y) *se calcula con la expresión* $y' = 2x\sqrt{y}$. *ii) la recta* $y - 12x + 15 = 0$ *es tangente a la gráfica de la función.*"



$y' = 2x\sqrt{y}$ $\quad y = 12x - 15$

$2x\sqrt{y} = 12$

$\sqrt{y} = 6/x \quad ; \quad y = 36x^{-2}$

$\frac{36}{x^2} = 12x - 15 \quad ; \quad (12x - 15)x^2 = 36$

$12x^3 - 15x^2 = 36$

$\boxed{x = 2}$ $\quad \boxed{y = 9}$

PVI: $y(2) = 9 \quad ; \quad y' = 2x\sqrt{y}$

$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y} \quad ; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2x\,dx \quad ; \quad 2\sqrt{y} = x^2 + C$

$2\sqrt{9} = (2)^2 + C \quad ; \quad 2(3) = 4 + C \quad ; \quad \boxed{C = 2}$

Función $= 2\sqrt{y} = x^2 + 2 \quad ; \quad y = \frac{(x^2+2)^2}{4}$

$f(x,y) = 2x\sqrt{y} \quad ; \quad R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$

$f_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y}} \quad ; \quad R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$

$R = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$

$x_0 = 2$
$y_0 = 9 \quad ; \quad 9 > 0 \quad ;$ R/ Se garantiza solución única y existida.

a. ¿Es posible un análisis a priori del problema sobre existencia y unicidad de soluciones? Explique.

   R/ Seria posible si nos dieran valores (x,y) para probar, de lo contrario no sabría a en donde voy a analizar si existe o no solución.

b. Resuelva el problema y reescríbalo en la forma estándar de un PVI. Luego haga un análisis de existencia y unicidad de soluciones.

   R/ Se encuentra al final de la imagen.

2. Considere el PVI: $y' = \sqrt{x - y},\ y(2) = 1.$
   a. Utilice el análisis en el campo de direcciones y reescriba el PVI a la manera del problema 1.

R/ Considere el siguiente problema: "*determinar si existe una función* $y = y(x)$ *que cumpla con las condiciones siguientes: i) la derivada en todo punto* (x, y) *se calcula con la expresión* : $y' = \sqrt{x - y}$, *ii) la recta* $y - x + 1 = 0$ *es tangente a la gráfica de la función.*"

b. Con un recurso algebraico sencillo es posible encontrar una familia paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial utilizando integración. Haga el intento de encontrar la familia y utilizarla para resolver el PVI.

Proyecto 1.

1. **Modelo Torricelli.** Construya un aplicativo en GeoGebra con las características siguientes:
   a. El usuario selecciona:
      i. El recipiente (que será simétrico respecto al eje **y**) eligiendo un intervalo $[0, b]$ y una función definida en ese intervalo ($3 \leq b \leq 7$).
      ii. El área del orificio de vaciado.
      iii. El nivel inicial del líquido en el recipiente.
   b. El aplicativo entrega como salidas:
      i. La función que describe el nivel del líquido en el recipiente en cualquier instante de tiempo.
      ii. El valor del tiempo de vaciado a partir de la condición inicial.
      iii. La simulación dinámica del vaciado en una de las vistas gráficas

2. **Modelo Logístico.** Consiga información del comportamiento del virus COVID 19 en la ciudad de Cali, de marzo a agosto, y haga un análisis bajo las condiciones siguientes:
   a. Al tabular sus datos, el *ajuste logístico* debe arrojarle información sobre el comportamiento en el tiempo de la población infectada en la ciudad.
   b. Estudie los resultados a la luz de la ecuación logística de la sección 2.1 del texto guía. Identifique los parámetros involucrados a partir de los datos reales.
   c. Escriba sus conclusiones, incluyendo su percepción sobre la pertinencia del uso de la ecuación logística para estudiar este caso particular de población infectada.