## A 3. probléma egy általánosítása

A 3. probléma megoldásából kiderült, hogy az $a_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ sorozatra $a_{\ell+1} - 2a_\ell + a_{\ell-1} = 1$ teljesül minden $\ell \geq 1$ esetén (nemsokára kiderül, hogy miért írok $n$ helyett $\ell$ betűt). Mivel $a_\ell = \binom{\ell+1}{2}$, binomiális együtthatókkal is felírhatjuk a kapott összefüggést: $\binom{\ell+2}{2} - 2 \cdot \binom{\ell+1}{2} + \binom{\ell}{2} = 1$. Felmerül a kérdés, hogy mit kapunk, ha a binomiális együtthatók „nevezőjében" 2 helyett egy tetszőleges $m$ számot írunk:

$$\binom{\ell+2}{m} - 2 \cdot \binom{\ell+1}{m} + \binom{\ell}{m} = ? \tag{1}$$

Feltűnhet, hogy a bal oldalon az együtthatók $1, 2, 1$, azaz a Pascal-háromszög második sorának tagjai. Ezzel a megfigyeléssel (1) a következő alakot alakot ölti:

$$\binom{2}{0} \cdot \binom{\ell+2}{m} - \binom{2}{1} \cdot \binom{\ell+1}{m} + \binom{2}{2} \cdot \binom{\ell}{m} = ?$$

Ne álljunk meg, általánosítsunk tovább! Mi lesz az eredmény, ha 2 helyett egy tetszőleges $r$ számot írunk?

$$\binom{r}{0} \cdot \binom{\ell+r}{m} - \binom{r}{1} \cdot \binom{\ell+r-1}{m} + \cdots + (-1)^{r-1} \cdot \binom{r}{r-1} \cdot \binom{\ell+1}{m} + (-1)^r \cdot \binom{r}{r} \cdot \binom{\ell}{m} = ?$$

A Pascal-háromszögben ezt úgy lehet elképzelni, hogy kiindulunk egy tetszőleges helyről, és ferdén jobbra felfelé haladva leírunk néhány ($r+1$ db) számot: $\binom{\ell+r}{m}, \binom{\ell+r-1}{m}, \ldots, \binom{\ell+1}{m}, \binom{\ell}{m}$. Ezeket a számokat rendre megszorozzuk a Pascal-háromszög $r$-edik sorában álló számokkal, majd a kapott szorzatokat váltakozó előjelekkel összeadjuk.

Ezzel a problémával két évvel ezelőtt találkoztam diszkrét függvények különféle transzformációinak sajátértékeit vizsgálva. A megoldás az Acta Cybernetica folyóiratban megjelent cikkem egy lemmájában található. (A cikk letölthető innen: `http://cyber.bibl.u-szeged.hu/index.php/actcybern/article/view/3987` .) Elnézést kérek az önreklámért, de személyes okom van rá: a cikk az Imreh Csanád emlékére készült különszámban jelent meg. Csanáddal csoporttársak voltunk az egyetemen, és, ha jól tudom, Tarcsay tanár úrnak tanítványa volt. Egyelőre nincs időm többre, mint idemásolni a lemmát és a bizonyítását; ha érdekel valakit, akkor később leírom magyarul is. Az állítást valószínűleg indukcióval is be lehet bizonyítani, de engem jobban érdekelt, hogy mi a kombinatorikai jelentése. A bizonyítást egy kis fantasy történetre építettem, mert Csanáddal gyakran játszottunk együtt ilyen témájú szerepjátékokban. Szerencsére se a lektor se a szerkesztő nem kifogásolta a dolgot, ezért a bizonyítás megjelenhetett ebben a „komolytalan" formában:

**Lemma.** *For all natural numbers $\ell, r$ and $m$, we have*

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot \binom{\ell+r-k}{m} = \binom{\ell}{m-r}. \tag{2}$$

*Proof.* We give a combinatorial interpretation of the identity, and, to make the proof more vivid, we present it in the setting of a fantasy story. Assume that there is a group of $r$ *o*rcs and $\ell$ *e*$\ell$ves wandering together in Middle-earth. They learn about a wizard forging magic rings, and they decide to steal some of those rings. A set of $m$ members of the group is to be chosen for this mission, such that all the orcs are included (they are good fighters). Thus it suffices to choose the $m-r$ elves that are going with the orcs, and the number of such choices is obviously $\binom{\ell}{m-r}$.

Now we count the number of possibilities once more, with the help of the inclusion-exclusion principle, and this will result in the left hand side of (2). Let $E$ and $O$ denote the set of elves and orcs (thus $|E| = \ell$ and $|O| = r$), and let $\mathcal{G}$ stand for the set of "good" choices for the mission:

$$\mathcal{G} = \{M \subseteq E \cup O : |M| = m \text{ and } O \subseteq M\}.$$

We saw in the previous paragraph that $|\mathcal{G}| = \binom{\ell}{m-r}$. For every orc $o \in O$, let $\mathcal{B}_o$ denote the set of choices that are "bad", because the orc $o$ is not sent to the mission:

$$\mathcal{B}_o = \{M \subseteq E \cup O : |M| = m \text{ and } o \notin M\}.$$

Given $k$ orcs $o_1, \ldots, o_k \in O$, the cardinality of $\mathcal{B}_{o_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{o_k}$ is $\binom{\ell+r-k}{m}$, and there are $\binom{r}{k}$ possibilities for the set $\{o_1, \ldots, o_k\}$. Therefore, by the inclusion-exclusion principle, we have

$$|\mathcal{G}| = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \cdot \binom{r}{k} \cdot \binom{\ell+r-k}{m},$$

which is indeed the left hand side of (2). $\square$

Waldhauser Tamás
2019.10.26.