

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 8 - método de Gauss-Jordan para obtener matriz inversa

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación $AX + 2B = 3C$.

$$AX + 2B = 3C \rightarrow AX = 3C - 2B \rightarrow X = A^{-1}(3C - 2B)$$

Si existe la inversa A^{-1} podremos resolver de esta forma.

La matriz A ya es triangular (en este caso, triangular superior). Como ya tenemos tres filas no nulas en la matriz triangular, el rango de la matriz es 3. Como el rango coincide con la dimensión, podemos afirmar que la matriz admite inversa.

Para calcular A^{-1} vamos a aplicar el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_2' = F_2 - F_1, F_3' = F_3 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3' = F_3 - F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos resolver nuestra ecuación matricial.

$$X = A^{-1}(3C - 2B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) A^{-1}

b) Resolver $A \cdot X = B - A^2$ **(obtener matriz** X **)**

a) Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener la inversa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & | & 1 & 0 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_1 = F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 + 3F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & -1 & | & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = -F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 1 & | & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Y lo comprobamos:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Debemos resolver:

$$A \cdot X = B - A^2 \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - A^2)$$

$$B - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) ¿Para qué valores de λ existe A^{-1} ?

b) En la ecuación matricial $A \cdot X = B$, obtener X si $\lambda = 4$.

a) Obtenemos matriz triangular por el método de Gauss para determinar el número máximo de vectores linealmente independientes existentes en la matriz A .

Este número de vectores es igual al rango. Y si el rango es 3, al ser la matriz de orden 3, significará que existe inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = (1-\lambda)F_3 + F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Discusión de casos:

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Las filas } F_2 \text{ y } F_3 \text{ son idénticas} \rightarrow \text{hay 2 vectores linealmente independientes}$$

$\rightarrow \text{Rango} = 2 \rightarrow \text{no existe inversa}$

$$\lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ vectores linealmente independientes} \rightarrow \text{Rango} = 2 \rightarrow \text{no existe inversa}$$

$$\lambda \neq \{-1, 1\} \rightarrow 3 \text{ vectores linealmente independientes} \rightarrow \text{Rango} = 3 \rightarrow \exists A^{-1} \text{ si } \lambda \neq \{-1, 1\}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $A \cdot X = B$ con $\lambda = 4$.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

En primer lugar obtenemos la inversa de la matriz A .

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = 3F_3 - F_2 \\
 & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow F'_2 = 5F_2 + 2F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow F'_1 = 15F_1 + 4F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 3 & 12 & 24 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = \frac{1}{15}F_1, \quad F'_2 = \frac{-1}{15}F_2, \\
 & F'_3 = \frac{-1}{5}F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 & 9 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$