Teoría – Tema 9

Teoría - 8 - Casos particulares en la determinación de un plano - ejercicios tipo Selectividad

Plano que pasa por el punto A y es paralelo a las rectas r y s, que no son paralelas entre si

Recordemos: "Si tenemos un punto y dos vectores linealmente independientes, tenemos la ecuación paramétrica del plano".

$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, A)$ → Determinación lineal del plano

En estos ejercicios, el punto A nos lo da el enunciado. Y los dos vectores los obtenemos de los vectores directores de las dos rectas que también nos dan. Al decirnos que las dos rectas no son paralelas entre si, tenemos la garantía de que sus vectores directores son linealmente independientes.

Ejemplo 1 resuelto

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $A(-1,2,0)$ y es paralelo a las rectas $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{4}$ y $s: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=z$ (que no son paralelas entre si).

De las ecuaciones cartesianas de las rectas sacamos sus vectores directores, que serán linealmente independientes ya que las rectas no son paralelas entre si.

$\vec{u}_r=(2,-3,4)$, $\vec{u}_s=(3,4,1)$

El punto nos lo da el enunciado.

$A(-1,2,0)$

Aplicamos la determinación lineal del plano.

$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, A)$

Y la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x=-1+2\cdot\alpha+3\cdot\beta \\ y=2-3\cdot\alpha+4\cdot\beta \\ z=4\cdot\alpha+\beta \end{cases}$$

Si anulamos el determinante de la matriz ampliada llegamos a la ecuación general (si el enunciado no dice nada, podemos terminar sin más el problema con la paramétrica).

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x+1 \\ -3 & 4 & y-2 \\ 4 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 8z+12(y-2)-3(x+1)-(16(x+1)+2(y-2)-9z)=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8z+12y-24-3x-3-16x-16-2y+4+9z=0 \rightarrow -19x+10y+17z-39=0$$

Plano que es paralelo a la recta r y que pasa por los punto A y B, que no están alineados de forma paralela a la recta r

Tenemos dos puntos A y B del plano. Por lo que podemos obtener el vector $\vec{AB}$.

Además, este vector $\vec{AB}$ es linealmente independiente respecto al vector director de la recta r , ya que el enunciado del problema nos plantea que los puntos A y B no están alineados de forma paralela a la recta r .

Por lo tanto, ya tenemos todos los valores necesarios para la determinación lineal del plano:

$$\Pi(\vec{u}_r , \vec{AB} , A)$$

Ejemplo 2 resuelto

Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(-1,2,4)$ y $B(0,3,2)$, y que es paralelo a la recta $r: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ (los puntos no están alineados de manera paralela a la recta).

El vector que une ambos puntos A y B es:

$$\vec{AB}=(1,1,-2)$$

El vector director a la recta es:

$$\vec{u}_r=(4,1,2)$$

Ambos vectores son linealmente independientes, por no estar los puntos alineados de manera paralela a la recta.

El punto lo tomamos de uno de los dos que nos ofrece el enunciado:

$$A(-1,2,4)$$

Aplicamos la determinación lineal del plano.

$$\Pi(\vec{u}_r , \vec{AB} , A)$$

La ecuación paramétrica es:

$$\left\{\begin{matrix} x=-1+4\cdot\alpha+\beta \\ y=2+\alpha+\beta \\ z=4+2\cdot\alpha-2\cdot\beta \end{matrix}\right\}$$

Si anulamos el determinante de la matriz ampliada asociada llegamos a la ecuación general.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & y-2 \\ 2 & -2 & z-4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 4(z-4)+2(y-2)-2(x+1)-(2(x+1)+(z-4)-8(y-2))=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 4z-16+2y-4-2x-2-2x-2-z+4+8y-16=0 \rightarrow \quad -4x+10y+3z-40=0$$

Plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto A, que no pertenece a la recta r

Tenemos el punto A : ¡¡bien!!

Tenemos el vector director $\vec{u}_r$ de la recta r , que es paralela al plano: ¡¡bien!!

Necesitamos un segundo vector, paralelo al plano, pero que no sea paralelo al vector director de la recta (para conseguir que ambos vectores sean linealmente independientes).

¿Cómo conseguimos este segundo vector? Pues obteniendo un punto B de la recta y calculando el vector $\vec{AB}$, que será linealmente independiente respecto a $\vec{u}_r$ ya que el punto A no pertenece a la recta.

Y podremos aplicar la determinación lineal del plano

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{AB}, A)$$

Ejemplo 3 resuelto

Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r: x-2=\frac{y-1}{3}=z+1$ **y al punto** $A(2,5,1)$ **(el punto no pertenece a la recta).**

El vector director de la recta es:

$$\vec{u}_r=(1,3,1)$$

Un punto $B\in r$ es $B(2,1,-1)$ .Por lo tanto:

$$\vec{AB}=(0,-4,-2)$$

El punto lo obtenemos del enunciado.

$$A(2,5,1)$$

Aplicamos la determinación lineal del plano.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{AB}, A)$$

Donde la ecuación paramétrica es:

$$\left\{\begin{matrix} x=2+\alpha \\ y=5+3\cdot\alpha-4\cdot\beta \\ z=1+\alpha-2\cdot\beta \end{matrix}\right\}$$

El determinante igualado a cero de la matriz ampliada asociada, nos da la ecuación general del plano.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-2 \\ 3 & -4 & y-5 \\ 1 & -2 & z-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -4(z-1)+0-6(x-2)-(-4(x-2)+0-2(y-5))=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4z+4-6x+12+4x-8+2y-10=0 \rightarrow -2x+2y-4z-2=0$$

Por recordar un poco conceptos anteriores, podemos obtener la **ecuación segmentaria del plano**.

¿Recuerdas como se hacía?

$$-2x+2y-4z-2=0 \quad \rightarrow \quad -2x+2y-4z=2 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$$

Es decir, los puntos de corte del plano con los ejes cartesianos son:

$A(-1,0,0)$

$B(0,1,0)$

$C(0,0,-2)$

¿Más cosas que podemos hacer, si estamos un poco aburridos de la vida o nos flipan un montón las matemáticas que no podemos parar de practicar? Comprobar, por ejemplo, que los puntos $A(2,5,1)$ y $B(2,1,-1)$ pertenecen realmente al plano.

$A(2,5,1) \rightarrow -2\cdot 2+2\cdot 5-4\cdot 1-2=0 \rightarrow 0=0$ → Pertenece al plano

$B(2,1,-1) \rightarrow -2\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 1-2=0 \rightarrow 0=0$ → Pertenece al plano