Funkcja homograficzna

Funkcja homograficzna

Funkcję wymierną postaci:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

gdzie $ad - bc \neq 0$ i $c \neq 0$, nazywamy funkcją homograficzną.

Postać kanoniczna funkcji homograficznej

$$f(x) = \frac{k}{x-p} + q$$

gdzie $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $p = -\frac{d}{c}$, $q = \frac{a}{c}$.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{p\}$.
Zbiorem wartości jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{q\}$.
Wykresem funkcji homograficznej $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ jest hiperbola, która jest obrazem hiperboli $y = \frac{k}{x}$, w przesunięciu o wektor $\vec{u} = [p, q]$.
Punkt $S = (p, q)$, to środek symetrii tego wykresu.

Asymptoty

pionowa - $x = p$;
pozioma - $y = q$.

Równania osi symetrii

$$y = (x - p) + q;$$
$$y = -(x - p) + q.$$

Miejsca zerowe

Jeżeli $a \neq 0$ to miejscem zerowym funkcji homograficznej jest punkt $x = -\frac{b}{a}$.

Monotoniczność funkcji homograficznej

Jeżeli $k < 0$, to funkcja homograficzna jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, p)$ oraz $(p, +\infty)$.
Jeżeli $k > 0$, to funkcja homograficzna jest malejąca w przedziałach $(-\infty, p)$ oraz $(p, +\infty)$.

Współrzędne wierzchołków hiperboli (punkty, które leżą na jednej z osi symetrii)

Dla $k < 0$ - $(\sqrt{-k} + p, -\sqrt{-k} + q)$, $(-\sqrt{-k} + p, \sqrt{-k} + q)$.
Dla $k > 0$ - $\left(\sqrt{k} + p, \sqrt{k} + q\right)$, $\left(-\sqrt{k} + p, -\sqrt{k} + q\right)$.