Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 12 - Teorema de Lagrange

1. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange, o teorema del valor medio del cálculo diferencial, a la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$ en el intervalo $[0,1]$? En caso afirmativo, calcular el punto que predice el teorema.

Las condiciones del teorema de Lagrange son:

$f(x)=\frac{1}{2-x}$ continua en $[0,1]$ $\rightarrow$ es cierto, ya que el denominador solo se anula en $x=2$, por lo que la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

$f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$ derivable en $(0,1)$ $\rightarrow$ es cierto, ya que el denominador de la función derivada solo se anula en $x=2$, por lo que la función original es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

Con esto podemos aplicar la consecuencia de teorema de Lagrange.

$$\exists c\in(0,1)/\, f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad\rightarrow\quad f'(c)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1} \quad\rightarrow\quad f'(c)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2} \quad , \quad f'(c)=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{(2-c)^2}=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad 2=(2-c)^2$$

$$2=4+c^2-4c \quad\rightarrow\quad c^2-4c+2=0 \quad\rightarrow\quad c=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

Elegimos el valor que está dentro del intervalo $(0,1)$ $\rightarrow$ $c=2-\sqrt{2}\simeq0{,}59$