

# 高中数学

## 公式定理

编辑：罗建勇

探索理学奥妙 扩展学科视野  
提升数学素养 培养创新思维



# 绪 论

## 一、课程概述：

### 1、什么是数学？

恩格斯：“数学是研究数量关系和空间形式的科学。”

课程标准：“数学是研究数量关系和空间形式的科学，是刻画自然规律和社会规律的科学语言 and 有效工具。”

### (1) 数学是一切科学的共同语言

伟大的物理学家伽利略曾说：“宇宙像一本用数学语言写成的大书，如不掌握数学符号语言，就像在黑暗的迷宫里游荡，什么也认识不清。”

爱因斯坦在研究相对论时，花了数年时间，试图形成关于引力的某种结论，却不知道如何从数学上加以表述。他求助于好友——数学家格罗斯曼。格罗斯曼向他介绍了与我们学过的欧氏几何不同的黎曼几何，从而促进了相对论的产生。而黎曼几何在此之前 60 年已经产生了。所以，另一位物理学家，诺贝尔奖获得者温伯格说：“真是不可思议，当一位物理学家得到了一个思想时，却发现在它之前，数学家已经发现了。”

18 世纪初，牛顿在前人基础上总结出了万有引力定律。人们根据此定律，通过计算，就可以精确地求出太阳系中各个行星的运行轨道——就是我们今后要学到的椭圆。当时人们只知道太阳系中有五颗行星，其运行规律与由万有引力定律计算出的结果几乎完全一致，万有引力定律取得了巨大成功。但 1781 年，天文学家发现了第 7 颗行星——天王星，其观测数据与计算结果差异甚大，是万有引力定律有问题，还是其它原因？

1844-1845 年，英国的耶得默斯，法国的勒威烈，各自独立地根据万有引力定律和天王星的观测数据，运用相关数学知识，进行了大量的计算，推算出在天王星附近还有一颗行星，并给出其运行轨道。

1846 年，德国天文台在勒威烈预言的位置，找到了那颗行星，即第 8 颗行星——海王星。这是人类第一次通过数学计算准确地预言了行星的位置。

### (2) 数学是人们在日常生活、工作中必需的基础知识和技能

现在我们处在一个信息社会，在社会生活中几乎处处充满着数学。购物、购房、购买股票、参加保险时，采取什么样的方案，可以获得最大收益；看报纸、看电视、听广播时，随时可以发现数学概念——天气预报中，有降水概率、正负温度、空气污染指数，各地方各企业的增长率，购买彩票时，号码有多少种排列组合，个人所得税税率是多少，我们每个人都有身高、体重、体温、血压……。

### (3) 数学是训练智能，提高人类思维水平的工具

加里宁曾说：“数学是锻炼思维的体操。”

数学的特点就是高度的抽象性，严密的逻辑性。它将纷繁复杂的自然现象、社会现象，经过抽象和简化，从不证自明的少数几个公理出发，逻辑地演绎出整个系统，其立论清晰、严密而极具理性，成为训练人的思维能力的最好工具。我们广大中学生在学数学的过程中，不仅能体会到数学探究过程中的各种思维——想象、类比、联想、直觉、顿悟等，而且在经历严谨理性的证明、准确合理的计算过程中，能大大提高我们的逻辑思维能力，学会用公理化的方法，从纷繁的事实中找出最基本的、最本质的东西，用逻辑演绎的方法，将其表述出来。

当我们将来走上工作岗位之后会发现，在学校里学的一大堆数学知识似乎没有什么用处，但数学中所蕴涵的

思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用.

#### (4) 数学是一门艺术

大家看到这句话一定会觉得可笑,数学怎么成了一门艺术?

数学有以下几个特点:对(匀)称、简洁、统一、奇异.这正是数学的美,数学的艺术性所在.

古希腊著名学者毕达哥拉斯曾说:“一切平面图形中最美的是圆,一切立体图形中最美的是球.”因为这两种图形在各个方向上都是对称的.黄金分割在优选法中有着重要作用.

数学的语言本身就是最简洁的文字,却极其深刻地反映了复杂的客观规律.爱因斯坦的质能公式: $E=mc^2$ ( $m$ 为物体质量, $c$ 为光速)就是核爆炸的理论依据.

统一性是指部分与部分,部分与整体之间的和谐一致.引入相反数后,有理数的加减法就可以统一为代数和的形式;有了倒数概念,乘法与除法得到了统一;平面几何中的相交弦定理、割线定理、切割线定理和切线长定理可以统一到圆幂定理中.

1777年,法国数学家布丰邀请许多宾朋来家做了一个奇特的试验.他事先在白纸上画好一条条等间距的平行线,铺在桌上,又拿出一些质量均匀长度为平行线间距一半的小针,请客人把针一根根随便扔到纸上,布丰则在一旁计数,结果共投了2212次,其中与任一平行线相交的有704次,布丰又做了一个简单的除法 $2212 \div 704$ , (请大家先不要计算,猜一猜结果是多少?)

计算的结果是3.142,然后他宣布这就是圆周率 $\pi$ 的近似值,并且投的次数越多越精确.这个结果使人非常惊讶, $\pi$ 竟然和一个风马牛不相及的投针试验联系在一起.然而,这却是有数学理论依据的.我们将在高中阶段的概率学习中了解这一试验的理论依据.

奥地利著名物理学家薛定谔(*Erwin Schrödinger*, 1887年8月12日~1961年1月4日)提出的一个思想实验:将一只猫关在装有少量镭和氰化物的密闭容器里.镭的衰变存在几率,如果镭发生衰变,会触发机关打碎装有氰化物的瓶子,猫就会死;如果镭不发生衰变,猫就存活.根据量子力学理论,由于放射性的镭处于衰变和没有衰变两种状态的叠加,猫就理应处于死猫和活猫的叠加状态.这只既死又活的猫就是所谓的“薛定谔猫”.但是,不可能存在既死又活的猫,则必须在打开容器后才知道结果.

1957年,休·埃弗莱特提出的“多世界诠释”似乎为人们带来了福音,由于它太离奇开始没有人认真对待.格利宾认为,多世界诠释有许多优点,由此它可以代替哥本哈根诠释.格利宾在书中写道:“埃弗莱特.....指出两只猫都是真实的.有一只活猫,有一只死猫,它们位于不同的世界中.问题并不在于盒子中的放射性原子是否衰变,而在于它既衰变又不衰变.当我们向盒子里看时,整个世界分裂成它自己的两个版本.这两个版本在其余的各个方面都是全同的.区别只是在于其中一个版本中,原子衰变了,猫死了;而在另一个版本中,原子没有衰变,猫还活着.”

也就是说,上面说的“原子衰变了,猫死了;原子没有衰变,猫还活着”这两个世界将完全相互独立地演变下去,就像两个平行的世界一样.格利宾显然十分赞赏这一诠释,故他接着说:“这听起来就像科幻小说,然而.....它是基于无懈可击的数学方程,基于量子力学朴实的、自洽的、符合逻辑的结果.”“在量子的多世界中,我们通过参与而选择出自己的道路.在我们生活的这个世界上,没有隐变量,上帝不会掷骰子,一切都是真实的.”按格利宾所说,爱因斯坦如果还活着,他也许会同意并大大地赞扬这一个“没有隐变量,上帝不会掷骰子”的理论.

这个诠释的优点:薛定谔方程始终成立,波函数从不坍缩,由此它简化了基本理论.它的问题设想过于离奇,

付出的代价是这些平行的世界全都是同样真实的. 无懈可击的数学方程最终会给出答案.

当我们克服了很多困难,做出了一道道数学难题时,就会喜形于色,这也是一种美的享受.

2、怎样学好高中数学？抓好四个环节：

(1) 课前认真预习

高中数学课堂容量大,内容抽象,逻辑严密,仅仅靠课堂理解是不够的. 所以课前一定要认真预习,先把下一课要学习的内容认真看一遍,对照老师布置的预习题,看看自己哪些内容没有看懂,作个记号,在课堂上注意听老师是如何讲解的. 预习不是要求大家掌握多少内容,更多时给大家培养一个自学的习惯.

(2) 课堂专心听讲

课堂 45 分钟是我们学习的主阵地,一定要认真听老师的讲解,积极思考老师提出的问题,并适当记录,但不要做录音机,什么都记. 那记什么呢? ①记书上没有提到,老师补充讲解的内容;②记书上虽然有,但比较零散,而老师进行了概括总结的内容;③记自己没有听懂的内容,以便课后再向老师请教.

(3) 课后及时复习,完成作业

高中数学的特点决定了,我们很难在课堂上就透彻理解所有内容. 所以每堂课结束以后,一定要及时看书、看课堂笔记. 记忆概念、性质、公式. 不懂之处,要及时询问老师、同学,一定不能等到问题成堆再去解决.

(4) 一个单元、章节结束后,及时归纳,形成较完整的知识体系、逻辑体系.

当我们学完一个单元或一个章节后,要及时归纳总结,找出知识的前后联系,在自己的头脑中形成一个比较完整的知识体系. 然后整理出一些常见题型及其解法,从中提炼出所蕴含的数学思想,数学方法,将其内化为自己的知识,那你对这一单元,这一章节的知识就掌握的比较透彻了. 相信经过自己的刻苦努力,再运用一些适合自己的学习方法,同学们一定会在数学这一学科上取得满意的成绩,为将来进一步学习打下良好的基础.

二、课程内容：

1、教材内容

必修 ( 第一册 ) ( 共计 72 课时 )

| 章                        | 节                                                                          |
|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 第一章<br>集合与常用逻辑用语 (10)    | 1、1 集合的概念<br>1、2 集合间的基本关系<br>1、3 集合的基本运算<br>1、4 充分条件与必要条件<br>1、5 全称量词与存在量词 |
| 第二章<br>一元二次函数、方程和不等式 (8) | 2、1 等式性质与不等式性质<br>2、2 基本不等式<br>2、3 二次函数与一元二次方程,不等式                         |
| 第三章<br>函数的概念与性质 (12)     | 3、1 函数的概念及其表示<br>3、2 函数的基本性质<br>3、3 幂函数<br>3、4 函数的应用 ( 一 )                 |
| 第四章<br>指数函数与对数函数 (16)    | 4、1 指数<br>4、2 指数函数<br>4、3 对数                                               |

|                         |                                                                                                                                 |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | 4、4 对数函数<br>4、5 函数的应用 (二)                                                                                                       |
| <b>第五章</b><br>三角函数 (23) | 5、1 任意角和弧度制<br>5、2 三角函数的概念<br>5、3 诱导公式<br>5、4 三角函数的图象与性质<br>5、5 三角恒等变换<br>5、6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$<br>5、7 三角函数的应用 |

必修 (第二册) (共计 69 课时)

| 章                           | 节                                                                                                           |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>第六章</b><br>平面向量及其应用 (18) | 6、1 平面向量的概念<br>6、2 平面向量的运算<br>6、3 平面向量基本定理及坐标表示<br>6、4 平面向量的应用                                              |
| <b>第七章</b><br>复数 (8)        | 7、1 复数的概念<br>7、2 复数的四则运算<br>*7、3 复数的三角表示                                                                    |
| <b>第八章</b><br>立体几何初步 (19)   | 8、1 基本立体图形<br>8、2 立体图形的直观图<br>8、3 简单几何体的表面积与体积<br>8、4 空间点、直线、平面之间的位置关系<br>8、5 空间直线、平面的平行<br>8、6 空间·直线、平面的垂直 |
| <b>第九章</b><br>统计 (13)       | 9、1 随机抽样<br>9、2 用样本估计总体<br>9、3 案例统计 公司员工的肥胖情况调查分析                                                           |
| <b>第十章</b><br>概率 (9)        | 10、1 随机事件与概率<br>10、2 事件的相互独立性<br>10、3 频率与概率                                                                 |

选择性必修 (第一册) (共计 43 课时)

| 章                            | 节                                                                               |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>第一章</b><br>空间向量与立体几何 (15) | 1、1 空间向量及其运算<br>1、2 空间向量基本定理<br>1、3 空间向量及其运算的坐标表示<br>1、4 空间向量的应用                |
| <b>第二章</b><br>直线和圆的方程 (16)   | 2、1 直线的倾斜角与斜率<br>2、2 直线的方程<br>2、3 直线的交点坐标与距离公式<br>2、4 圆的方程<br>2、5 直线与圆、圆与圆的位置关系 |
| <b>第三章</b>                   | 3、1 椭圆                                                                          |

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| 圆锥曲线的方程 (12) | 3、2 双曲线<br>3、3 抛物线 |
|--------------|--------------------|

选择性必修 (第二册) (共计 30 课时)

| 章                       | 节                                                |
|-------------------------|--------------------------------------------------|
| 第四章<br>数列 (14)          | 4、1 数列的概念<br>4、2 等差数列<br>4、3 等比数列<br>* 4、4 数学归纳法 |
| 第五章<br>一元函数的导数及其应用 (16) | 5、1 导数的概念及其意义<br>5、2 导数的运算<br>5、3 导数在研究函数中的应用    |

选择性必修 (第三册) (共计 35 课时)

| 章                    | 节                                                                                    |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 第六章<br>计数原理 (11)     | 6、1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理<br>6、2 排列与组合<br>6、3 二项式定理                                      |
| 第七章<br>随机变量及其分布 (10) | 7、1 条件概率与全概率公式<br>7、2 离散型随机变量及其分布列<br>7、3 离散型随机变量的数字特征<br>7、4 二项分布与超几何分布<br>7、5 正态分布 |
| 第八章<br>成对数据的统计分析 (9) | 8、1 成对数据的统计相关性<br>8、2 一元线性回归模型及其应用<br>8、3 列联表与独立性检验                                  |

题注说明:带有“※”为提升性学习内容

带有“★”为基础性学习和必须掌握的内容

# 目 录

## 第一篇、函数学

### 第一部分 集合与逻辑用语

|                    |   |
|--------------------|---|
| 1. 1. 1 集合 .....   | 1 |
| 1. 1. 2 逻辑用语 ..... | 2 |

### 第二部分 函数概念与性质

|                         |   |
|-------------------------|---|
| 1. 2. 1 函数三要素 .....     | 3 |
| 1. 2. 2 函数单调性与奇偶性 ..... | 4 |
| 1. 2. 3 函数周期性与对称性 ..... | 5 |

### 第三部分 初等函数、方程与不等式

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 1. 3. 1 函数图像与变换 .....    | 6  |
| 1. 3. 2 函数零点与基本不等式 ..... | 7  |
| 1. 3. 3 一次函数及其变换 .....   | 8  |
| 1. 3. 4 反比例函数及其变换 .....  | 9  |
| 1. 3. 5 二次函数及其变换 .....   | 10 |
| 1. 3. 6 二次方程与不等式 .....   | 12 |
| 1. 3. 7 幂函数 .....        | 13 |
| 1. 3. 8 幂函数的衍生函数 .....   | 14 |
| 1. 3. 9 指数与指数函数 .....    | 15 |
| 1. 3. 10 对数与对数函数 .....   | 17 |

### 第四部分 导数与积分

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 1. 4. 1 极限与导函数 .....    | 19 |
| 1. 4. 2 极限与定积分 .....    | 21 |
| 1. 4. 3 导数在函数中的应用 ..... | 22 |



第五部分 三角函数

1. 5. 1 三角函数概念与计算 ..... 25

1. 5. 2 正余弦型三角函数 ..... 27

1. 5. 3 三角恒等变换 ..... 28

第六部分 数 列

1. 6. 1 等差与等比数列 ..... 29

1. 6. 2 数列通项公式 ..... 30

1. 6. 3 数列求和公式 ..... 32

第二篇、几何学

第一部分 平面向量

2. 1. 1 向量及其运算 ..... 34

2. 1. 2 向量的位置关系 ..... 35

2. 1. 3 向量法研究三角形性质 ..... 36

2. 1. 4 解三角形 ..... 37

第二部分 复 数

2. 2. 1 复数概念与计算 ..... 38

2. 2. 2 复数的三角表示 ..... 38

第三部分 立体几何与空间向量

2. 3. 1 空间几何体的结构特征 ..... 40

2. 3. 2 空间点线面位置关系 ..... 42

2. 3. 3 几何法求空间角与距 ..... 43

2. 3. 4 立体几何的空间向量方法 ..... 44

2. 3. 5 空间球的表面积与体积 ..... 46

第四部分 直线与圆

2. 4. 1 直线与直线方程 ..... 48

2. 4. 2 直线与圆位置关系 ..... 49

2. 4. 3 线性规划与最优解 ..... 50

第五部分 圆锥曲线

2. 5. 1 椭圆及其性质 ..... 51

2. 5. 2 双曲线及其性质 ..... 52

2. 5. 3 抛物线及其性质 ..... 53

2. 5. 4 点差法与通法 ..... 54

2. 5. 5 圆锥曲线的参数方程 ..... 55

2. 5. 6 仿射变换与齐次式 ..... 56

2. 5. 7 圆锥曲线考点梳理 ..... 57

第三篇、数理统计与概率

第一部分 统计学

3. 1. 1 单一数据的统计分析 ..... 60

3. 1. 2 成对数据的统计分析 ..... 61

第二部分 计数原理

3. 2. 1 排列与组合 ..... 63

3. 2. 2 二项式定理 ..... 64

第三部分 概率与概型

3. 3. 1 古典概型与几何概型 ..... 65

3. 3. 2 事件与概率计算 ..... 66

第四部分 离散型随机变量

3. 4. 2 离散型随机变量 ..... 67

3. 4. 1 概率分布 ..... 68



## 第一部分 集合与逻辑用语

小课堂



### 集合

#### 1、元素与集合的概念

**元素**：一般地，把研究对象统称为元素，常用小写拉丁字母  $a, b, c, \dots$  表示。

**集合**：把一些元素组成的总体叫做集合（简称集），用大写拉丁字母  $A, B, C, \dots$  表示。

集合中元素的特性：

确定性、互异性、无序性

#### 2、元素与集合的关系

| 关系  | 概念                                 | 记法           | 读法            |
|-----|------------------------------------|--------------|---------------|
| 属于  | $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于集合 $A$    | $a \in A$    | $a$ 属于集合 $A$  |
| 不属于 | $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 不属于集合 $A$ | $a \notin A$ | $a$ 不属于集合 $A$ |

#### 3、集合的表示方法

(1) **列举法**：把集合中的元素一一列举出来，并用大括号 “ $\{ \}$ ” 括起来表示集合的方法。

(2) **描述法**：设  $A$  是一个集合，我们把集合  $A$  中所有具有共同特征  $p(x)$  的元素  $x$  所组成的集合表示为  $\{x \in A/p(x)\}$ ，这种表示集合的方法称为描述法。

#### ★ 4、常用数集

| 常用数集 | 自然数集 | 正整数集          | 整数集 | 有理数集 | 实数集 |
|------|------|---------------|-----|------|-----|
| 记法   | $N$  | $N^*$ 或 $N_+$ | $Z$ | $Q$  | $R$ |

#### ★ 5、集合间的关系

**空集**：把不含任何元素的集合叫做空集。记作： $\emptyset$ 。并规定：空集是任何集合的子集。

**子集**： $A$  中的任一元素都属于  $B$ ，记做： $A \subseteq B$

**真子集**：如果  $A \subseteq B$ ，且  $B$  中至少有一元素不属于  $A$ 。记作： $A \subsetneq B$

#### ※ 6、含 $n$ 个元素的集合

| 集合                         | 子集个数  | 真子集个数     | 非空子集个数    | 非空真子集个数   |
|----------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ | $2^n$ | $2^n - 1$ | $2^n - 1$ | $2^n - 2$ |





## 小课堂

## ★ 7、集合的运算

| 运算    | 交 集                                           | 并 集                                           | 补 集                                           |
|-------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 语言描述  | 属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的元素组成的集合                   | 所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素的组成的集合                | 全集中集合 $A$ 以外的部分称为 $A$ 的补集.                    |
| 表示    | $A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ | $A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ | $C_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ |
| venn图 |                                               |                                               |                                               |



## 逻辑用语

四种命题的真假性之间的关系:

①两个命题互为逆否命题,

它们有相同的真假性;

②两个命题为互逆命题或互否

命题,它们的真假性没有关系

充要条件应用说明:

①**唯一性**:给定条件  $p$ ,由  $p$  推出  $q$  成立时, $q$  推出的结果不是唯一的  $p$ ,则必要性不成立.

eg:  $x=1 \Rightarrow |x|=1$ ,  $|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ,则  $x=1$  是  $|x|=1$  的充分不必要条件.

②**不等式推论**:小范围不等式成立  $\Rightarrow$  大范围不等式成立,反之不成立.小推大,大不可推小

1、命题:可以判断真假的陈述语句称为命题.

2、真值表

| $p$ | $q$ | 非 $p$ | $p$ 或 $q$ | $p$ 且 $q$ |
|-----|-----|-------|-----------|-----------|
| 真   | 真   | 假     | 真         | 真         |
| 真   | 假   | 假     | 真         | 假         |
| 假   | 真   | 真     | 真         | 假         |
| 假   | 假   | 真     | 假         | 假         |

## ★ 3、四种命题

原命题:若  $p$  则  $q$     逆命题:若  $q$  则  $p$     否命题:若  $\neg p$  则  $\neg q$     逆否命题:若  $\neg q$  则  $\neg p$

| 原命题 | 逆命题 | 否命题 | 逆否命题 |
|-----|-----|-----|------|
| 真   | 真   | 真   | 真    |
| 真   | 假   | 假   | 真    |
| 假   | 真   | 真   | 假    |
| 假   | 假   | 假   | 假    |

## ★ 4、充要条件

**充分条件**:若  $p \Rightarrow q$ ,则  $p$  是  $q$  充分条件.

**必要条件**:若  $q \Rightarrow p$ ,则  $p$  是  $q$  必要条件.

**充要条件**:若  $p \Rightarrow q$ ,且  $q \Rightarrow p$ ,则  $p$  是  $q$  充要条件.

## ★ 5、全称量词与存在量词

(1)**全称量词与全称命题**:短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,并用符号“ $\forall$ ”表示.含有全称量词的命题,叫做全称命题.

(2)**存在量词与特称命题**:短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号“ $\exists$ ”表示.含有存在量词的命题,叫做特称命题.

(3)**全称命题与特称命题的符号表示及否定**

①**全称命题**  $p: \forall x \in M, p(x)$ ,它的否定  $\neg p: \exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$ . 其否定是特称命题.

②**特称命题**  $p: \exists x_0 \in M, p(x_0)$ ,它的否定  $\neg p: \forall x \in M, \neg p(x)$ . 其否定是全称命题.

命题的否定与否命题:

(1)命题“ $\forall x \in R, 3x^2 - 2x + 1 > 0$ ”的否定是  $\exists x_0 \in R, 3x_0^2 - 2x_0 + 1 \leq 0$ .

(2)命题“若  $a, b$  都是正数,则  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ”的否命题是若  $a, b$  不都是正数,则  $a+b < 2\sqrt{ab}$ .



## 第二部分 函数概念与性质



### 函数三要素

#### 1、函数的概念

设  $A, B$  是两个非空的数集, 如果按某种确定的对应关系  $f$ , 使对于集合  $A$  中的任意一个元素  $x$ , 在集合  $B$  中都有唯一确定的元素  $f(x)$  和它对应, 那么称  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数, 记作:  $y=f(x), x \in A$ . 其中所有输入值  $x$  组成的集合  $A$  叫作函数  $y=f(x)$  的定义域; 所有输出值  $y$  组成的集合叫作函数  $y=f(x)$  的值域.

#### ★ 2、函数的定义域(自变量的取值范围)

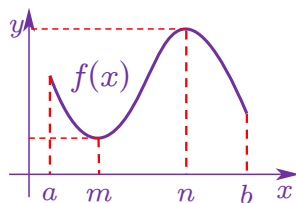
**定义域的约束:** ① 分式的分母不能为零; ② 对数的真数大于零;  
③ 根号下被开方数大于等于零. ④ 零指数幂底数不为零

#### 3、函数的值域(因变量的取值范围)

函数值域要综合函数定义域和函数单调性.

如图, 函数  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的函数

由图可知:  $f(x)$  的值域是  $[f(m), f(n)]$ .



#### ★ 4、求函数值域的几种方法

(1) 函数定义域直接制约着函数的值. 对于比较简单的单调函数可通过定义域求得值域.

(2) 换元法求解函数值域:(换元后自变量取值范围改变, 函数值域不会变化)

二次函数型可通过换元法转化为二次函数, 进而求解函数值域.

分子、分母是一次函数或二次齐次式有理函数用换元法转化为常见初等函数求值域;

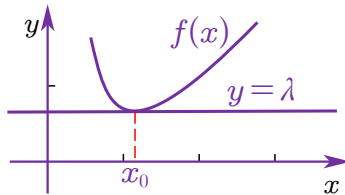
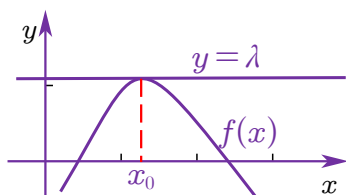
分子、分母中含有二次项的有理函数, 用换元法转化为基本不等式求值域.

(3) 导数方法求值域: 通过求解函数极值和端点值来确定函数的最值.

#### ★ 5、含参问题与最值

(1) 若:  $\lambda \geq f(x)$  恒成立, 则  $\lambda \geq f(x)_{\max}$ ;  $\lambda \geq f(x)$  成立, 则  $\lambda \geq f(x)_{\min}$

(2) 若:  $\lambda \leq f(x)$  恒成立, 则  $\lambda \leq f(x)_{\min}$ ;  $\lambda \leq f(x)$  成立, 则  $\lambda \leq f(x)_{\max}$



### 小课堂



函数概念通俗易懂的理解为:  
唯一的自变量  $x$  有唯一的因  
变量  $y$  与之对应。

函数问题, 定义域优先





## 小课堂

### 函数单调性的性质运算:

① 增函数+增函数=增函数

减函数+减函数=减函数

② 添加根号单调性不改变

变倒数、加负号单调性改变

**复合函数:** 设  $y$  是  $\mu$  的函数

$y=f(\mu)$ ,  $\mu$  是  $x$  的函数  $\mu=\varphi(x)$

如果  $\varphi(x)$  的值全部或部分在

$f(\mu)$  的定义域内, 则  $y$  通过  $\mu$

成为  $x$  的函数, 记  $y=f(\varphi(x))$

eg:  $y=\sqrt{x^2+2}$ 、 $y=\sin(x-1)^2$

$y=\tan(3x+1)$  都是复合函数

而  $y=\log(\cos x-3)$  就不是复合函数,  $\because \forall x$  都不能使  $y$  有意义

### 判断复合函数的单调性步骤:

(1) 求复合函数的定义域;

(2) 将复合函数分解为常见函数  
(一次、二次、幂、指、对函数);

(3) 判断每个常见函数的单调性

(4) 将中间变量的取值范围转化为自变量的取值范围;

(5) 求出复合函数的单调性。

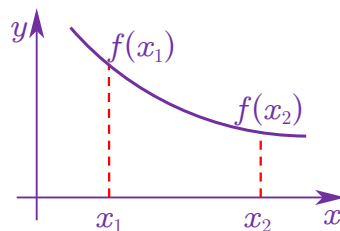
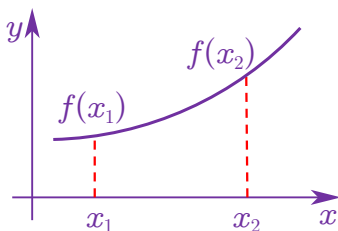


## 函数单调性与奇偶性

★ 1、函数单调性的定义: 设任意实数  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 且  $x_1 < x_2$ , 那么:

$f(x_1) - f(x_2) < 0 \iff f(x)$  在  $[a, b]$  上是增函数;

$f(x_1) - f(x_2) > 0 \iff f(x)$  在  $[a, b]$  上是减函数.



※ 2、斜率式判断单调性: 设  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 \neq x_2$  那么

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \iff f(x)$  在  $[a, b]$  上是增函数;

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \iff f(x)$  在  $[a, b]$  上是减函数.

★ 3、导数法判断单调性: 设函数  $y=f(x)$  在某个区间内可导.

若  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  为增函数; 若  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  为减函数.

※ 4、复合函数单调性: 同增异减. 复合函数  $f[g(x)]$  有:

当  $f(x)$  与  $g(x)$  的增减性相同时, 复合函数就是增函数 (同增);

当  $f(x)$  与  $g(x)$  的增减性相反时, 复合函数就是减函数 (异减).

★ 5、函数的奇偶性:

|     | 奇 函 数                     | 偶 函 数                       |
|-----|---------------------------|-----------------------------|
| 前 提 | 定义域关于原点对称                 |                             |
| 图 示 |                           |                             |
| 计算式 | $f(-x) = -f(x)$           | $f(-x) = f(x)$              |
| 对称性 | $f(x)$ 关于原点对称             | $f(x)$ 关于 $y$ 轴对称           |
| 特点  | 在 $x=0$ 处有定义, 则: $f(0)=0$ | 对任意的 $x$ , 都有 $f(x)=f( x )$ |

6、多项式函数  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  的奇偶性

多项式函数  $P(x)$  是奇函数  $\iff P(x)$  偶次项的系数全为零. (常数按偶次项看待)

多项式函数  $P(x)$  是偶函数  $\iff P(x)$  奇次项的系数全为零.





## 函数周期性与对称性

★ 1、周期性定义：

函数 $f(x)$  定义域内任意的 $x$ , 存在一个不等于0的常数 $T$ , 使得 $f(x+T)=f(x)$  恒成立, 则称 $f(x)$  是周期函数,  $T$ 是它的一个周期. 一般 $T$ 是 $f(x)$  的周期, 则 $kT(k \in \mathbb{Z})$  也是 $f(x)$  的周期.

## ※ 2、函数周期推导

- (1)  $f(x) = f(x+a)$ , 则  $f(x)$  的周期  $T = a$ ;
- (2)  $f(x-a) = f(x+a)$ , 或  $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$ , 则  $f(x)$  的周期  $T = 2a$ ;
- (3)  $f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)} (f(x) \neq 0)$ , 则  $f(x)$  的周期  $T = 3a$ ;
- (4)  $f(x+a) = f(x) - f(x+a)$ , 则  $f(x)$  的周期  $T = 6a$ .
- (5) 若  $f(x+a) = f(x+b)$  或  $f(x-a) = f(x-b)$ , 则  $T = |b-a|$

### ※ 3、函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

- (1)  $y=f(x)$  图象关于  $x=a$  对称  $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$ .  
 (2)  $y=f(x)$  图象关于  $x=\frac{a+b}{2}$  对称  $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

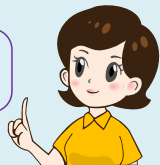
#### 4、两个函数图象的对称性

- (1) 函数  $y=f(x)$  与函数  $y=f(-x)$  的图象关于直线  $x=0$  (即  $y$  轴) 对称.
- (2) 函数  $y=f(x)$  和  $y=f^{-1}(x)$  的图象关于直线  $y=x$  对称.

### ※ 5、周期性与对称性的关系

若函数  $y=f(x)$  的图像关于直线  $x=a, x=b$  都对称, 则  $f(x)$  为周期函数且  $2|b-a|$  是它的一个周期.

**推论:**偶函数  $y=f(x)$  图像关于  $x=a$  对称, 则  $f(x)$  为周期函数且  $2|a|$  是它的一个周期.



## 小课堂

周期性是对称性的一种体现





小课堂

## 第三部分 初等函数、方程与不等式



### 函数图像与变换

#### 1、五点法画图：

函数化简 → 定义域 → 讨论性质（奇偶性、单调性）→ 算零点、最值点 → 光滑曲线作图。

#### ★ 2、图象变换

(1) 平移变换：自变量“左加右减”： $y=f(x)$   $\xrightarrow{\text{左(右)平移 } a \text{ 个单位}}$   $y=f(x \pm a)$



因变量“上加下减”： $y=f(x)$   $\xrightarrow{\text{上(下)平移 } b \text{ 个单位}}$   $y=f(x) \pm b$



(2) 伸缩变换： $y=f(x)$   $\xrightarrow{\text{横坐标变为原来的 } \omega \text{ 倍}}$   $y=f(\frac{1}{\omega}x)$

(3) 对称变换：“对称谁，谁不变，对称原点都要变”

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}} y=-f(x)$$

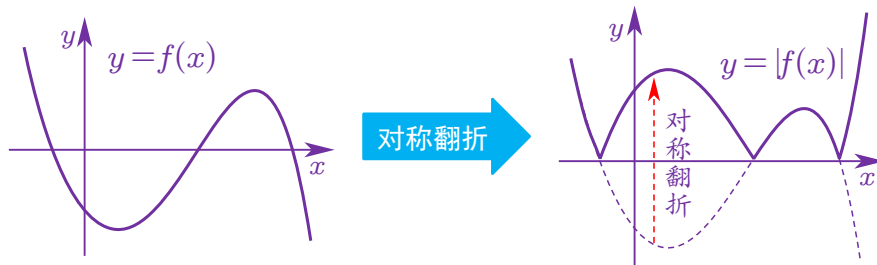
$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}} y=f(-x)$$

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x)$$

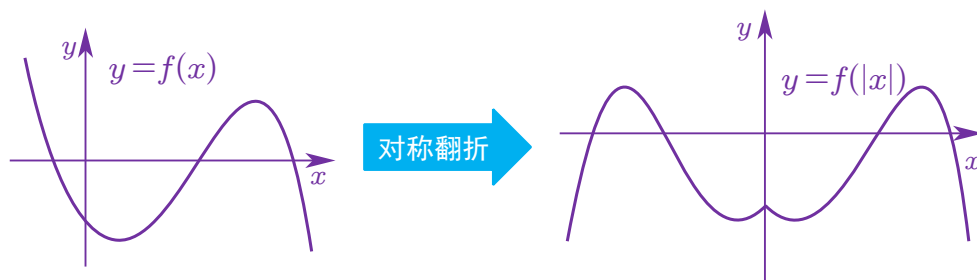
$$y=f(x) \xrightarrow{\text{关于 } x=a \text{ 对称}} y=f(2a-x)$$

(4) 翻折变换：

$y=f(x) \rightarrow y=|f(x)|$  保留  $x$  轴上方部分，并将下方部分沿  $x$  轴对称翻折到上方



$y=f(x) \rightarrow y=f(|x|)$  保留  $y$  轴右边部分，并将右边部分沿  $y$  轴对称翻折到左边







## 函数零点与基本不等式

### 小课堂

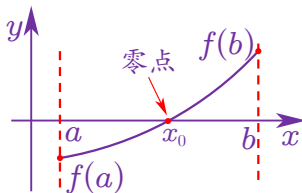


### 1、方程与函数关系:

方程  $f(x) = 0$  有实根  $\iff$  函数  $y = f(x)$  图象与  $x$  轴有交点  $\iff$  函数  $y = f(x)$  有零点

### ★ 2、零点存在性定理: 零点存在性定理不可逆

如果函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的图象是连续不断的一条曲线, 并且有  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 那么函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有零点, 即存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f(c) = 0$ , 这个  $c$  也就是方程  $f(x) = 0$  的根.



### 3、不等式的性质:

性质 1: (对称性) 如果  $a > b$ , 那么  $b < a$ ; 如果  $b < a$ , 那么  $a > b$ .

性质 2: (传递性) 如果  $a > b$ , 且  $b > c$ , 则  $a > c$ .

性质 3: 如果  $a > b$ , 则  $a + c > b + c$ .

推论: (同向可加性) 如果  $a > b, c > d$ , 则  $a + c > b + d$ .

性质 4: 如果  $a > b, c > 0$ , 则  $ac > bc$ ; 如果  $a > b, c < 0$ , 则  $ac < bc$ .

### ★ 4、基本(均值)不等式:

对于任意两个正实数  $a, b$ ,  $\frac{a+b}{2}$  叫做  $a, b$  的算术平均值,  $\sqrt{ab}$  叫做  $a, b$  的几何平均值.

则有:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , 当且仅当  $a = b$  时, 等号成立.

证明(几何解释)如下:

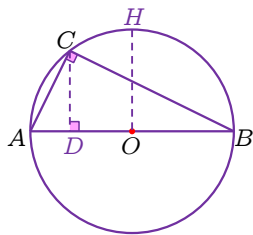
作一圆, 直径记为  $AB$ , 过  $C$  作垂线, 连接  $AC, BC$ .

设  $AD = a, BD = b$ , 则圆的半径  $OH = \frac{a+b}{2}$

由  $\triangle ACD \sim \triangle BCD$  可得:  $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD, \therefore CD = \sqrt{ab}$

由图可得到不等式:  $OH \geq CD$  恒成立, 当且仅当  $CD = OH$ , 即  $OA = OB$  时取等号.

所以:  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ , 恒有  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  成立, 当且仅当  $a = b$  时取等号.



### ※ 5、平均不等式: 调和平均 $\leq$ 几何平均 $\leq$ 算术平均 $\leq$ 平方平均.

$$\frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+) \text{ (当且仅当 } a = b \text{ 取 " = " )}$$

$$\text{变形公式: } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$





## 小课堂



## 一次函数及其变换

### ★ 1、一次函数的图像性质

| 解析式 | $f(x) = kx + b$                                                                                                 |                |                |                |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| 参数  | $k$ 代表直线的斜率, 含义是直线的倾斜程度. $k = \tan \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$<br>$b$ 代表直线的纵截距, 含义是直线与 $y$ 轴相交的点的纵坐标. |                |                |                |
| 图 像 | $k > 0, b > 0$                                                                                                  | $k > 0, b < 0$ | $k < 0, b > 0$ | $k < 0, b < 0$ |
|     |                                                                                                                 |                |                |                |
| 增减性 | 单调递增                                                                                                            |                | 单调递减           |                |

### 2、一次函数的平移变换: 左加右减, 上加下减

(1)  $f(x) = kx + b$  图象向左 (右) 平移  $m$  个单位得到:  $f(x) = k(x \pm m) + b$ ;

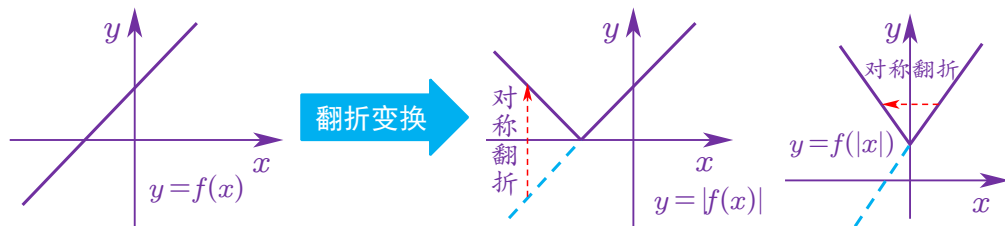
(2)  $f(x) = kx + b$  图象向上 (下) 平移  $h$  个单位得到:  $f(x) = kx + b \pm h$ ;

### ★ 3、一次函数的翻折变换

以  $f(x) = 2x + 1$  与  $|f(x)| = |2x + 1|$ 、 $f(|x|) = 2|x| + 1$  为例:

(1)  $|f(x)|$  图象是将  $f(x)$  在  $x$  轴上方图象保留, 将  $x$  轴下方的图象作  $x$  轴翻折后得到.

(2) 函数  $f(|x|)$  图象是将函数  $f(x)$  在  $y$  轴右侧的图象不变, 把  $y$  轴左侧的图象去掉, 再将  $y$  轴右侧图象作  $y$  轴翻折到左侧得到.



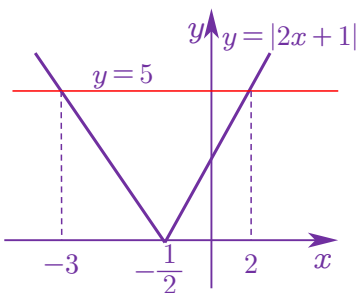
### ★ 4、一次绝对值不等式 (还可以转化为一元二次不等式求解)

(1) 对于  $|f(x)| \leq a$  型不等式的解法: (以  $|2x + 1| \leq 5$  为例)

① 解出  $y = f(x)$  的零点: 令  $y = 2x + 1$  中  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

② 在同一坐标系中画出  $y = |f(x)|$  与  $y = a$  的图像:

③ 解出翻折前  $f(x) = a$  实根, 再根据对称得出翻折后的实根:



④ 根据图像,得出  $|f(x)| \leq a$  的解集:



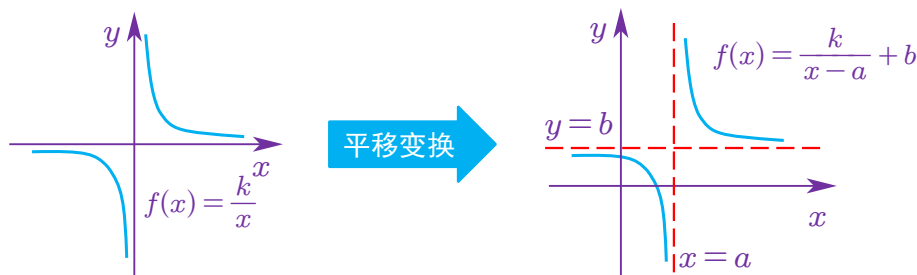
## 反比例函数及其变换

### ★ 1、反比例函数图像性质

| 解析式 | $f(x) = \frac{k}{x}$                                             |                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 图 像 | $k > 0$                                                          | $k < 0$                                                          |
|     |                                                                  |                                                                  |
| 增减性 | 当 $x > 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小;<br>当 $x < 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而减小; | 当 $x > 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大;<br>当 $x < 0$ 时, $y$ 随 $x$ 的增大而增大; |

### ★ 2、反比例函数的平移变换

$y = \frac{k}{x} (k > 0)$  图像向右平移  $a$  个单位, 向上平移  $b$  个单位可以转化为  $y = \frac{k}{x-a} + b (k > 0)$



反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  具有两

条渐近线:  $x=0, y=0$ ,

所以在研究反比例函数的  
平移变换时, 要考虑到渐近  
线位置的改变。

### ※ 3、一次分式函数

形如  $f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$  这样的函数称为 “一次分式函数”。

① 在函数的分子上配出分母的形式:  $f(x) = \frac{\frac{c}{a}(ax+b) + c - \frac{cb}{a}}{ax+b}$

② 列项:  $f(x) = \frac{c}{a} + \frac{c - \frac{cb}{a}}{ax+b}$ .

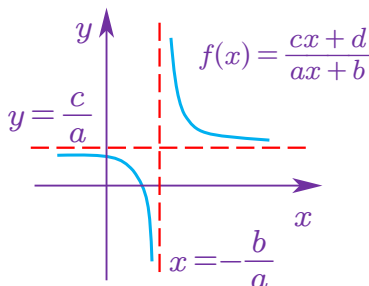
③ 令  $k = c - \frac{cb}{a}$ ,  $t = \frac{c}{a}$ , 则函数  $f(x) = t + \frac{k}{ax+b}$ , 其图像如下:

④ 由图可得  $f(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$  的性质:

$f(x)$  定义域  $(-\infty, -\frac{b}{a}), (-\frac{b}{a}, +\infty)$

$f(x)$  值域  $(-\infty, \frac{c}{a}), (\frac{c}{a}, +\infty)$

$f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{b}{a}), (-\frac{b}{a}, +\infty)$  上单调递减.



## 小课堂





## 小课堂



## 二次函数及其变换

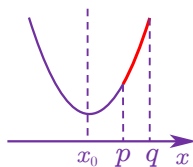
### ★ 1. 函数图像与性质

|     |                                                                                                                                                                               |                                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 解析式 | <b>一般式:</b> $y = ax^2 + bx + c$<br><b>顶点式:</b> $y = a(x - h)^2 + k$<br><b>交点式:</b> $y = a(x - x_1)(x - x_2)$<br>一般式与顶点式互化: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ |                                                                                   |
| 图 象 | $a > 0$                                                                                                                                                                       | $a < 0$                                                                           |
|     |                                                                                                                                                                               |                                                                                   |
| 对称轴 | 直线 $x = -\frac{b}{2a}$                                                                                                                                                        |                                                                                   |
| 顶 点 | $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$                                                                                                                                       |                                                                                   |
| 增减性 | $x < -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 随 $x$ 增大而减小<br>$x > -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 随 $x$ 增大而增大                                                                                              | $x < -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 随 $x$ 增大而增大<br>$x > -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 随 $x$ 增大而减小. |
| 最 值 | 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 有最小值,                                                                                                                                            | 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, $y$ 有最大值,                                                |

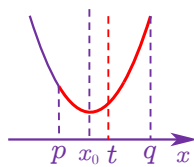
### ※ 2. 二次函数闭区间值域

二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  在闭区间  $[p, q]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ ,

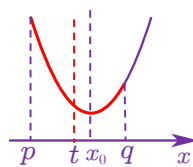
其中对称轴  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , 区间  $[p, q]$  上的中点  $t = \frac{1}{2}(p + q)$ .



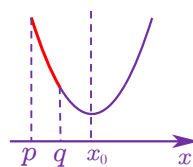
(1)



(2)



(3)



(4)

(1) 若  $x_0 < p$ , 则  $f(x)_{\min} = f(p) = m, f(x)_{\max} = f(q) = M$ ;

(2) 若  $p \leq -\frac{b}{2a} < x_0$ , 则  $f(x)_{\min} = f(-\frac{b}{2a}) = m, f(x)_{\max} = f(q) = M$ ;

(3) 若  $x_0 \leq -\frac{b}{2a} < q$ , 则  $f(x)_{\min} = f(-\frac{b}{2a}) = m, f(x)_{\max} = f(p) = M$ ;

(4) 若  $q \leq -\frac{b}{2a}$ , 则  $f(x)_{\min} = f(q) = m, f(x)_{\max} = f(p) = M$ .





### 3、二次函数的平移变换

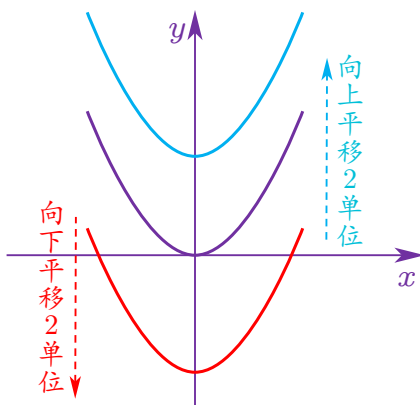
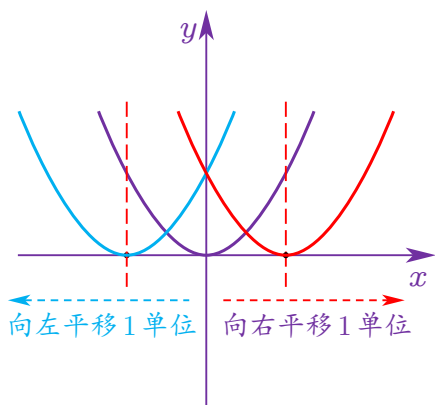
以二次函数  $y = x^2$  的图象为例：

(1)  $y = x^2$  的图象向左平移 1 单位长度后的解析式： $y = (x + 1)^2$ ；

向右平移 1 单位长度后的解析式： $y = (x - 1)^2$

(2)  $y = x^2$  的图象向上平移 2 单位长度后的解析式： $y = x^2 + 2$ ；

向下平移 2 单位长度后的解析式： $y = x^2 - 2$



### ★ 4、函数图象的翻折变换

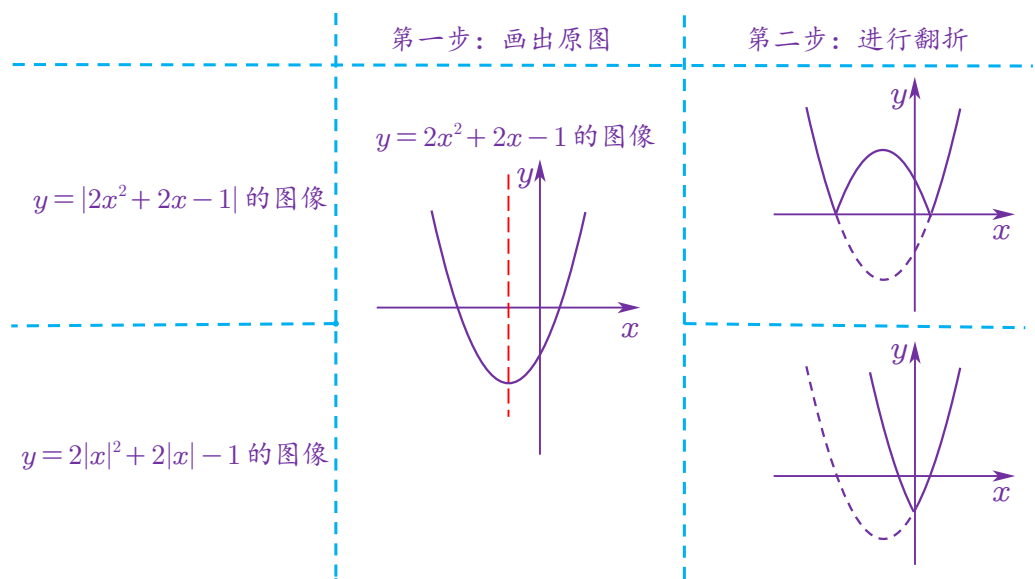
以  $y = 2x^2 + 2x - 1$  与  $y = |2x^2 + 2x - 1|$ 、 $y = 2|x|^2 + 2|x| - 1$  图象间的关系为例：

(1) 函数  $y = |2x^2 + 2x - 1|$  的图象是将函数  $y = 2x^2 + 2x - 1$  在  $x$  轴上方的图象保留，

再将  $x$  轴下方的图象作关于  $x$  轴对称得到。

(2) 函数  $y = 2|x|^2 + 2|x| - 1$  对  $x$  取绝对值的图象，是将函数  $y = 2x^2 + 2x - 1$  在  $y$  轴右侧

的图象保持不变， $y$  轴左侧的图象去掉，再将  $y$  轴右侧的图象作关于  $y$  轴对称得到。





## 小课堂



## 二次方程与不等式

### 1、一元二次方程判别式:

一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  中  $b^2 - 4ac$  叫做一元二次方程的根的判别式, 通常用“ $\Delta$ ”来表示, 即  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

当  $\Delta > 0$  时, 一元二次方程有 2 个不相等的实数根;

当  $\Delta = 0$  时, 一元二次方程有 2 个相等的实数根;

当  $\Delta < 0$  时, 一元二次方程没有实数根.

### ★ 2、公式法求解一元二次方程的根:

一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$ , 当  $\Delta \geq 0$  时,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### ★ 3、韦达定理: 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根是 $x_1, x_2$ ,

$$\text{那么 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

### ★ 4、因式分解 (十字相乘法): $mnx^2 + (mp + nq)x + pq = (nx + p)(mx + q)$

举例:  $3x^2 + 11x + 10 = 0$

$$\begin{array}{cc} x & 2 \\ 3x & 5 \end{array}$$

$$\because 5x + 6x = 11x \Rightarrow \begin{array}{l} 3x^2 + 11x + 10 = 0 \\ (x + 2)(3x + 5) = 0 \end{array}$$

**判断方法:** 拆二次项与常数项, 交叉相乘和刚好为一次项即可用该方法, 横向书写结果.

### ★ 5、二次不等式的解集 ( $a > 0$ )

| $\Delta = b^2 - 4ac$         | $\Delta > 0$                                   | $\Delta = 0$                   | $\Delta < 0$ |
|------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------|--------------|
| 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象 |                                                |                                |              |
| $ax^2 + bx + c = 0$ 的根       | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$    | 无实根          |
| $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集      | $\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$           | $\{x   x \neq -\frac{b}{2a}\}$ | $R$          |
| $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集      | $\{x   x_1 < x < x_2\}$                        | $\emptyset$                    | $\emptyset$  |



★ 1、需实记的幂函数  $y = x^a (a \neq 0, 1)$ 

| 解析式 | $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$                                                                                             | $y = \frac{1}{x}$                | $y = x^3$       | $y = x^2$       |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------|-----------------|
| 图 像 |                                                                                                                              |                                  |                 |                 |
| 定义域 | $[0, +\infty)$                                                                                                               | $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ | $\{x/x \in R\}$ | $\{x/x \in R\}$ |
| 值 域 | $[0, +\infty)$                                                                                                               | $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ | $\{y/y \in R\}$ | $[0, +\infty)$  |
| 奇偶性 | 非奇非偶函数                                                                                                                       | 奇函数                              | 奇函数             | 偶函数             |
| 定 点 | (1, 1)                                                                                                                       |                                  |                 |                 |
| 考 点 | 需实记幂函数的图像, 然后根据函数图像变换画出其它初等函数图像, 并且得到其它初等函数的性质。例如: 根据 $y = \sqrt{x}$ 的图像画出 $y = \sqrt{\omega x \pm a} \pm b$ 的图像, 并且能得到它的性质。 |                                  |                 |                 |

※ 2、幂函数  $y = x^a (a = \frac{q}{p}, p, q \in Z, p, q \text{ 互质})$  的性质:(1) 过定点: 所有的幂函数在  $(0, +\infty)$  都有定义, 并且图象都通过点  $(1, 1)$ 。(2) 单调性: 如果  $\alpha > 0$ , 则幂函数的图象过原点, 并且在  $[0, +\infty)$  上为增函数。如果  $\alpha < 0$ , 则幂函数的图象在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 在第一象限内图象无限接近  $x$  轴与  $y$  轴。(3) 奇偶性: 当  $\alpha$  是整数时,  $\alpha$  为奇数, 幂函数为奇函数,  $\alpha$  为偶数, 幂函数为偶函数。当  $\alpha = \frac{q}{p}$  (其中  $p, q$  互质,  $p$  和  $q \in Z$ ) 时若  $p$  为奇数  $q$  为奇数时, 则  $y = x^{\frac{q}{p}}$  是奇函数 (奇母奇子奇函数),若  $p$  为奇数  $q$  为偶数时, 则  $y = x^{\frac{q}{p}}$  是偶函数 (奇母偶子偶函数),若  $p$  为偶数  $q$  为奇数时, 则  $y = x^{\frac{q}{p}}$  是非奇非偶函数。 (偶母有子非奇偶)



## 小课堂



## 幂函数的衍生函数

### ★(一)对勾函数(双勾函数、耐克函数)的图像与性质

| 解析式        | $f(x) = ax + \frac{b}{x}$                                                                                                                                                 |                                                                     |                                  |                                  |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 图 像        | $a > 0, b > 0$                                                                                                                                                            | $a < 0, b < 0$                                                      | $a > 0, b < 0$                   | $a < 0, b > 0$                   |
|            |                                                                                                                                                                           |                                                                     |                                  |                                  |
| 渐近线        | $y = x$ 或 $y = -x$                                                                                                                                                        |                                                                     |                                  |                                  |
| 定义域        | $\{x/x \neq 0\}$                                                                                                                                                          |                                                                     |                                  |                                  |
| 值 域        | $y \in (-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$                                                                                                                 |                                                                     | $y \in (-\infty, +\infty)$       |                                  |
| 单调增<br>区 间 | $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}}] \cup [\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$                                                                                                       | $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$       | $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ | 无                                |
| 单调减<br>区 间 | $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0) \cup (0, \sqrt{\frac{b}{a}})$                                                                                                                   | $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}}] \cup [\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ | 无                                | $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| 不等式<br>性 质 | $x > 0$ 时, $f(x) = ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ ; $x < 0$ 时, $f(x) = ax + \frac{b}{x} \leq -2\sqrt{ab}$ .<br>均值不等式可以应用在对勾函数中,用来求解最值,但是在使用时要注意到均值不等式的应用条件:“一正、二定、三相等” |                                                                     |                                  |                                  |

### ※(二)三次函数的图像与性质

| 定义      | 形如 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 的函数,称为“三次函数”.                                              |                 |                                                      |                 |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------|-----------------|
|         | $\Delta = 4b^2 - 12ac = 4(b^2 - 3ac)$                                                               |                 |                                                      |                 |
| 图 像     | $a > 0$                                                                                             |                 | $a < 0$                                              |                 |
|         | $\Delta > 0$                                                                                        | $\Delta \leq 0$ | $\Delta > 0$                                         | $\Delta \leq 0$ |
|         |                                                                                                     |                 |                                                      |                 |
| 极值<br>点 | 两个极值 $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$                                                | 无极值             | 两个极值 $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ | 无极值             |
| 性质      | ① $f(x)$ 不可能为偶函数;当且仅当 $b = d = 0$ 时是奇函数<br>② 三次函数是中心对称曲线,且对称中心是 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ |                 |                                                      |                 |







## 指数与指数函数

### 小课堂



#### ★ 1、分数、指数、有理数幂

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{且 } n > 1); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a; \quad \text{当 } n \text{ 为偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

#### 2、指数幂的运算性质

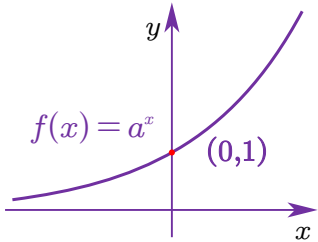
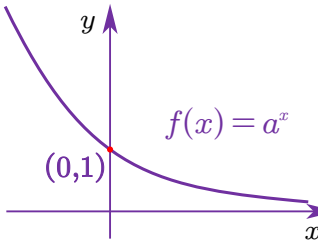
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in \mathbb{Q}).$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} (a > 0, r, s \in \mathbb{Q}).$$

$$(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in \mathbb{Q}).$$

$$(ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in \mathbb{Q}).$$

#### ★ 3、指数函数

| 函数名称            | 指数函数                                                                               |                                                                                     |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 定义              | 形如 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的函数叫做指数函数                                 |                                                                                     |
| 图 象             | $a > 1$                                                                            | $0 < a < 1$                                                                         |
|                 |  |  |
| 定义域             | $\mathbb{R}$                                                                       |                                                                                     |
| 值 域             | $(0, +\infty)$                                                                     |                                                                                     |
| 过定点             | 图象过定点 $(0, 1)$ , 即当 $x = 0$ 时, $y = 1$ .                                           |                                                                                     |
| 渐近线             | $y = 0$ 即 $x$ 轴                                                                    |                                                                                     |
| 奇偶性             | 非奇非偶                                                                               |                                                                                     |
| 单调性             | 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数                                                               | 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数                                                                |
| $a$ 变化对<br>图象影响 | $a$ 越大, 开口越靠近 $y$ 轴                                                                | $a$ 越小, 开口越靠近 $y$ 轴                                                                 |

#### ★ 4、指数型函数

(1) 形如:  $y = Aa^{x-n} + B$  的函数称之为指数型函数.

(2) 指数函数  $y = a^x$  经过平移变换和伸缩变换后可以得到指数型函数.

(3) 指数型函数的渐近线为:  $x = B$ , 恒过定点:  $(n, A + B)$





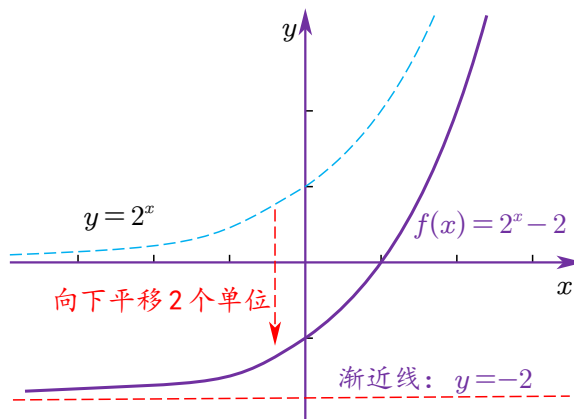
## 小课堂

### ※ 5、指数函数的翻折变换

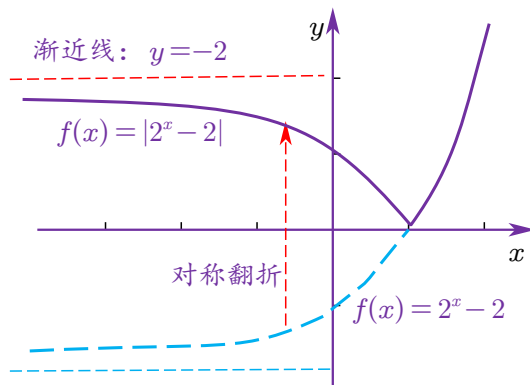
(1) 函数  $y = |a^x|$  与指数函数  $y = a^x$  图像一样, 不需要进行翻折(函数值没有负的部分)

(2) 函数  $y = |a^{x-n} + m|$  的翻折变换(以  $y = |2^x - 2|$  为例:)

① 先画出函数  $y = 2^x - 2$  的图像(上加下减, 函数  $y = 2^x$  向下平移 2 个单位可得)

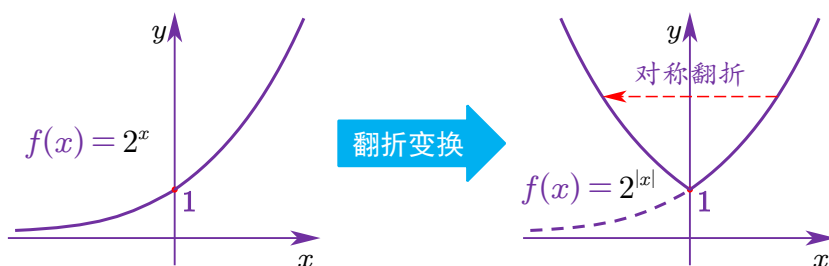


② 将函数值为负的部分对称翻折到  $y$  轴上方(去绝对值的原理)

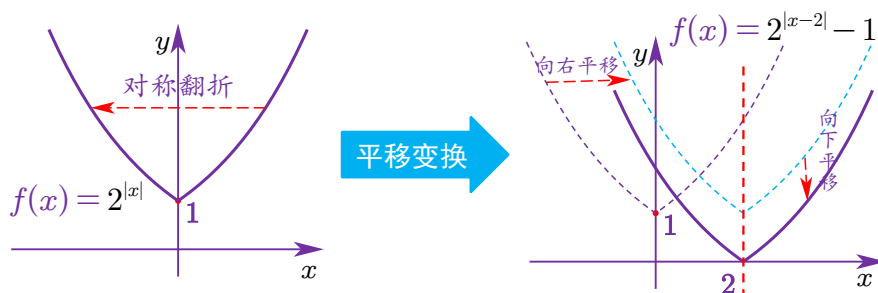


(3) 函数  $y = a^{|x-n|} + m$  的翻折变换以  $y = 2^{|x-2|} - 1$  为例:

① 先画出函数  $y = 2^{|x|}$  的图像( $y = 2^x$  关于  $y$  轴对称翻折)



② 函数  $y = 2^{|x|}$  向右平移 2 个单位, 向下平移 1 个单位, 可得到:  $y = 2^{|x-2|} - 1$





## 对数与对数函数

### 小课堂



#### ★ 1、指数式与对数式的互化

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N (a > 0, a \neq 1, N > 0).$$

#### ※ 2、对数换底公式

$$\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, m > 0, \text{ 且 } m \neq 1, N > 0).$$

$$\text{推论 } \log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, m, n > 0, \text{ 且 } m \neq 1, n \neq 1, N > 0).$$

#### ★ 3、对数四则运算法则

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbb{R}).$$

$$(4) \log_a M^n = \frac{n}{b} \log_a M (b \neq 0, n \in \mathbb{R})$$

注: 性质运算公式:  $\log_a 1 = 0$      $\log_a a = 1$      $a^{\log_a N} = N$

#### ★ 4、对数函数

| 函数名称            | 对数函数                                                    |                        |
|-----------------|---------------------------------------------------------|------------------------|
| 定义              | 形如 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的函数叫做对数函数 |                        |
| 图 象             | $a > 1$                                                 | $0 < a < 1$            |
|                 |                                                         |                        |
| 定义域             | $(0, +\infty)$                                          |                        |
| 值 域             | $\mathbb{R}$                                            |                        |
| 过定点             | 图象过定点 $(1, 0)$ , 即当 $x = 1$ 时, $y = 0$ .                |                        |
| 奇偶性             | 非奇非偶                                                    |                        |
| 单调性             | 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数                                  | 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数 |
| $a$ 变化对<br>图象影响 | $a$ 越大, 开口越靠近 $x$ 轴                                     | $a$ 越小, 开口越靠近 $x$ 轴    |

#### ★ 5、对数型函数

(1) 形如:  $y = A \log_a (x + n) + B$  的函数称之为对数型函数.

(2) 对数函数  $y = \log_a x$  经过平移变换和伸缩变换后可以得到对数型函数.

(3) 对数型函数的渐近线为:  $x = 0$ , 恒过定点:  $(n, A + B)$



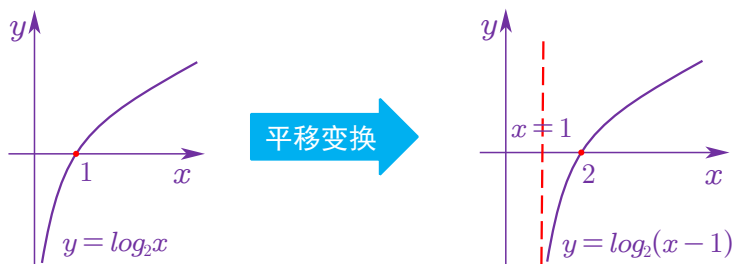


## 小课堂

### ※ 6、对数函数的变换

(1) 函数  $y = \log_a(x+b)$  由对数函数  $y = \log_a x$  经过平移变换可以得到.

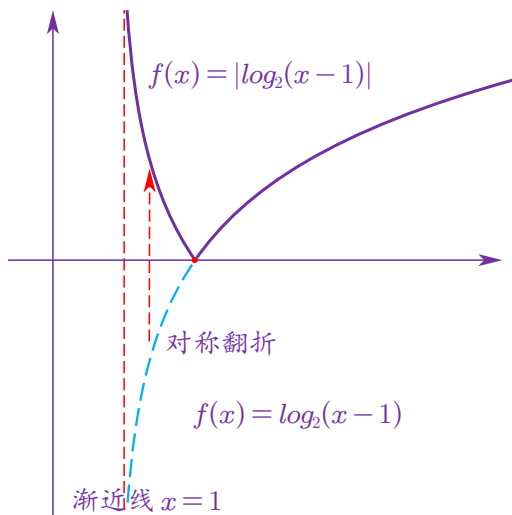
eg:  $y = \log_2(x-1)$  由对数函数  $y = \log_2 x$  向右平移 1 个单位可以得到.



(2) 函数  $f(x) = |\log_a(x+b)|$  的翻折变换 (以  $f(x) = |\log_2(x-1)|$  为例:)

① 先画出函数  $f(x) = \log_2(x-1)$  的图像 (左加右减, 函数向右平移 1 个单位), 过程如上方

② 将  $f(x) = \log_2(x-1)$  负的部分沿  $x$  轴对称翻折可得  $f(x) = |\log_a(x+b)|$  图像与性质



### ★ 7、指数不等式与对数不等式

(1) 当  $a > 1$  时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x); \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}.$$

(2) 当  $0 < a < 1$  时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x); \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

### 8、对数换底不等式及其推广

若  $a > 0, b > 0, x > 0, x \neq \frac{1}{a}$ , 则函数  $y = \log_{ax}(bx)$

(1) 当  $a > b$  时, 在  $(0, \frac{1}{a})$  和  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上  $y = \log_{ax}(bx)$  为增函数.

(2) 当  $a < b$  时, 在  $(0, \frac{1}{a})$  和  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上  $y = \log_{ax}(bx)$  为减函数.

推论: 设  $n > m > 1, p > 0, a > 0$ , 且  $a \neq 1$ , 则

$$(1) \log_{m+p}(n+p) < \log_m n.$$

$$(2) \log_a m \log_a n < \log_a^2 \frac{m+n}{2}.$$



## 第四部分 导数与积分

小课堂



极限与导函数

### 1、极限

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的附近有定义, 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 一定存在  $\delta > 0$ , 使不等式  $|f(x) - A| < \varepsilon$  在  $|x - x_0| \in (0, \delta)$  时恒成立, 那么常数  $A$  叫做函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的极限, 记作:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

### 2、几个常用极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad (1 > a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### 3、导函数的定义: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

求导数值的一般步骤:

①求函数的增量:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ;

②求平均变化率:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ;

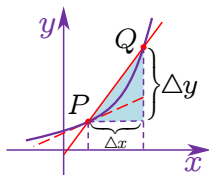
③求极限, 得导数:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

### ★ 4、导函数的几何意义

$f(x)$  在点  $x_0$  处导数  $f'(x_0)$  表示:  $f(x)$  在点  $x_0$  处切线的斜率.

如图, 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 割线  $PQ$  斜率的极限, 就是切线的斜率.

即:  $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ .



### ★ 5、函数求导公式

$$(C)' = 0 \quad (C \text{ 为常数})$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

### ★ 6、函数求导法则

(1) 线性法则:  $(mf(x) \pm ng(x))' = mf'(x) \pm ng'(x)$  (2) 链式法则:  $\{f[\mu(x)]\}' = f'[\mu(x)] \cdot \mu'(x)$

(3) 积法则:  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  (4) 商法则:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### ★ 7、导数应用

(1) 研究函数单调性: 若  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  为增函数; 若  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  为减函数

(2) 求函数极值: 极大值: 在  $x_0$  附近 “左增右减  $\nearrow \searrow$ ”; 极小值: 在  $x_0$  附近 “左减右增  $\searrow \nearrow$ ”

步骤:  $f(x)$  定义域  $\rightarrow$  求导  $f'(x) \rightarrow$  求  $f'(x)$  零点  $\rightarrow$  列表  $\rightarrow$  判断增减性  $\rightarrow$  得极值:

(3) 求函数在  $[a, b]$  的值域:  $f(x)$  在  $[a, b]$  内极值与  $f(a)$ 、 $f(b)$  比较, 最大的数为最大值, 最小的数为最小值





## 小课堂

### ※ 8、同构母函数图像与性质

| 解析式 | $f(x) = xe^x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $f(x) = \frac{x}{e^x}$ | $f(x) = \frac{e^x}{x}$           |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 图 像 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                        |                                  |
| 定义域 | $(-\infty, +\infty)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $(-\infty, +\infty)$   | $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| 同 构 | <p>① <math>(x+1) \cdot e^x = e^{-1} \cdot (x+1) \cdot e^{x+1} = e^{-1}f(x+1)</math>, 即将 <math>f(x)</math> 向左平移 1 个单位, 再将纵坐标缩小为原来的 <math>\frac{1}{e}</math> 倍, 故可得 <math>y = (x+1) \cdot e^x</math> 在区间 <math>(-\infty, -2)</math> <math>\downarrow</math>, 在区间 <math>(-2, +\infty)</math> <math>\uparrow</math>, 当 <math>x = -2</math> 时, <math>y_{\min} = -\frac{1}{e^2}</math>.</p> <p>② <math>y = \frac{x-1}{e^x} = \frac{1}{e}(x-1) \cdot e^{-(x-1)} = -\frac{1}{e}f(-(x-1))</math>, 即将 <math>f(x)</math> 关于原点对称后, 向右移一个单位, 再将纵坐标缩小 <math>\frac{1}{e}</math> 倍, 得到 <math>y = \frac{x-1}{e^x}</math>, 故可得 <math>y = \frac{x-1}{e^x}</math> 在区间 <math>(-\infty, 2)</math> <math>\uparrow</math>, 在区间 <math>(2, +\infty)</math> <math>\downarrow</math>, 当 <math>x = 2</math> 时, <math>y_{\max} = \frac{1}{e^2}</math>.</p> |                        |                                  |

| 解析式 | $f(x) = x \ln x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $f(x) = \frac{x}{\ln x}$   | $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 图 像 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                            |                          |
| 定义域 | $(0, +\infty)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ | $(0, +\infty)$           |
| 同 构 | <p>① <math>\frac{\ln x + 1}{x} = e \frac{\ln ex}{ex} = -ef(-\ln ex)</math>, 当 <math>-\ln ex \in (-\infty, -1)</math>, 即 <math>x \in (1, +\infty)</math> <math>\downarrow</math>, 当 <math>-\ln ex \in (-1, +\infty)</math>, 即 <math>x \in (0, 1)</math> <math>\uparrow</math>, <math>y_{\max} = 1</math>.</p> <p>② <math>\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}f(-\ln x^2)</math>, 当 <math>-\ln x^2 \in (-\infty, -1)</math>, 即 <math>x \in (\sqrt{e}, +\infty)</math> <math>\downarrow</math>, 当 <math>-\ln x^2 \in (-1, +\infty)</math>, 即 <math>x \in (0, \sqrt{e})</math> <math>\uparrow</math>, <math>y_{\max} = \frac{1}{2e}</math>.</p> |                            |                          |





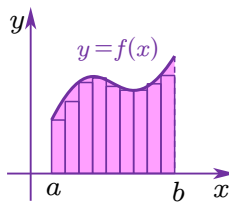
### 1、定积分概念:

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 将区间  $[a, b]$  等分成  $n$  个小区间, 每个小区间长度为  $D(D = \frac{b-a}{n})$ , 对所有小区间作和式:

$$S_n = \sum_{i=1}^n D \times f(i) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \times f(i)$$

当  $D$  无限接近于 0 时,  $S_n$  无限趋近于常数  $S$ . 称  $S$  为函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \times f(i), \text{ 记为: } S = \int_a^b f(x) dx$$



### 2、定积分几何意义: 定积分表示积分上下限与函数围成的几何图形的面积.

### 3、积分公式

$$\int 0 dx = c (c \text{ 为常数}) \quad \int 1 dx = x + c \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c (a \neq 0)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c (a \neq 0)$$

### 4、积分运算法则

(1) 线性运算:  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k \text{ 为常数})$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

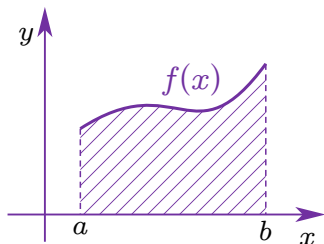
(2) 区间可加性:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  (其中  $a < c < b$ );

### 5、微积分基本定理: 牛顿莱布尼茨公式

若函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续的, 且  $F'(x) = f(x)$ , 则有:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

### 6、积分应用:

直线  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x$  轴及曲线  $y = f(x)$  围成曲边梯形面积  $S = \int_a^b f(x) dx$





## 小课堂



## 导数在函数中的应用

### ★ 1、切线问题:

(1) 已知切点  $(x_0, f(x_0))$ , 求切线方程的解题步骤:

① 求导数值  $f'(x)$ ;

② 切线方程为:  $y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$ .

(2) 过点  $(a, b)$  的切线方程求解步骤:

① 设切点  $(x_0, f(x_0))$ ;

② 切线斜率为:  $\frac{f(x_0) - b}{x_0 - a} = f'(x_0) \implies x_0$

③ 方程为:  $y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)$ ;

(3) 求  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的公切线的步骤:

① 设切点  $(x_1, f(x_1)), (x_2, g(x_2))$ ; ② 求导列关系式  $k = \frac{f(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) = g'(x_2)$

③ 根据上面的关系式解出  $x_1$  或  $x_2$ ; ④ 回代入②中求出  $k$ , 如  $k = f'(x_1)$ ;

⑤ 利用点斜式求出切线, 如  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ .

### ※ 2、参数取值范围:

(1) 函数定义域: 解决函数问题, 定义域优先.

(2) 分离参量: 利用分离参量的思路将题目给的参数移到一边.  $a \leq h(x)$

(3) 恒成立和成立问题:

① 恒成立:  $f(x) < a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < a$ ;  $f(x) > a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$ ;

② 成立:  $f(x) < a$  成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < a$   $f(x) > a$  成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > a$

(4) 导函数零点可求: 导函数零点可求时, 运用常规方法可求得函数最值, 进而可得参数取值范围. 步骤:  $f(x)$  定义域  $\rightarrow f'(x) \rightarrow$  求  $f'(x)$  零点  $\rightarrow$  列表  $\rightarrow$  判断增减性  $\rightarrow$  得最值.

### ※ 3、导函数零点不可求的处理方法: 需要单独设分子为新函数, 求导推出原函数单调性.

(1) 分类讨论法 (证明不等式成立): 通过对原函数或者导函数进行因式分解, 对局部函数进行研究, 找出参数分界值, 在分段区间上证明题意成立, 从而印证该区间参数可以取到

单调性讨论: 分离出参量后, 构造新函数, 求新函数最值, 若新函数的导函数零点不可求往往需要对分式分子进行求导 (整式直接进行二阶求导), 若得到的式子不能比较直观的判断正负则继续求导, 直到得到的式子能比较直观判断正负, 进而推出前面几阶导数的增减和正负, 直到可以确定原函数增减性.

### (2) 分离参量法:

(1) 隐零点: 通过虚设零点进行等量代换求解函数的最值.

"虚设代换"法: 导函数  $f'(x)$  的零点无法求出显性的表达时, 可以利用设而不求的思想.

① 在证明零点存在后, 假设零点为  $x_0$ , 则可得到一个关于  $x_0$  的方程  $f'(x_0) = 0$

② 根据  $f'(x)$  的单调性, 得出  $x_0$  两侧的正负, 进而得出原函数的单调性和极值  $f(x_0)$ ;

③ 将①式中关于  $x_0$  的方程整体或局部代入  $f(x_0)$ , 从而求得  $f(x_0)$ , 然后解决相关问题.

注意: 使用  $f'(x_0) = 0$  进行 "指幂代换" (或 "对幂代换"), 尽最转化为幂函数进行讨论.







**(2) 洛必达法则:**在驻点不可求时,往往需要讨论函数的增减性,这时,函数的最值往往在间断点处取得,所以需要通过极限计算的方法求出函数的最值. 求极限时,函数的极限如果满足未定式  $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ . 则需通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值.

$$\text{即: } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

#### ※ 4、证明单变量不等式

**(1) 核心考点:**主要思路是把问题转化为函数最值问题,譬如证明  $f(x) > g(x)$ :

**策略一:**移项,构造函数,证明  $(f(x) - g(x))_{\min} > 0$ ;

**策略二:**放缩,证明  $f(x) \geq l(x) > g(x)$ ,一般  $l(x)$  为切线;

**策略三:**变形,证明  $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ ,该法并非通法,但有时对证明有意想不到的效果.

**(2) 函数放缩化曲为直:**在处理函数不等式或者求解函数近似解中,由于原函数比较复杂,常用化曲为直的方法进行放缩,以曲线上某点处的切线进行放缩,前提条件是放缩对象具有凹凸性(二阶导恒大于或小于0).

常见的化曲为直有:

| 基础 | 指数切线放缩: $e^x \geq x + 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 对数切线放缩: $\ln x \leq x - 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 引深 | ① $e^{x-1} \geq x$ 、 $e^x \geq ex$ (切横 $x=1$ )<br>② $e^{x+a} \geq x + a + 1$ (用 $x+a$ 替换 $x$ ,切点横坐标是 $x=-a$ ),<br>③ $xe^x \geq x + \ln x + 1$ . (用 $x + \ln x$ 替换 $x$ ,切点横坐标满足 $x + \ln x = 0$ ).<br>④ $e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 > x^2$ ( $x > 0$ ) (用 $\frac{x}{2}$ 替换 $x$ ,切点横坐标是 $x=2$ ); 有 $e^{\frac{x}{n}} \geq e \cdot \frac{x}{n}$ ( $x > 0$ ) 的构造模型. | ① $\ln x \leq \frac{x}{e}$ . (用 $\frac{x}{e}$ 替换 $x$ ,切点横坐标是 $x=e$ )<br>② $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ . (用 $\frac{1}{x}$ 替换 $x$ ,切点横坐标 $x=1$ ),或者记为 $x \ln x \geq x - 1$ .<br>③ $\ln x \leq x^2 - x$ . ( $\frac{\ln x}{x} \leq x - 1$ ).<br>④ $\ln(x+1) \leq x$ ,由 $\ln x \leq x - 1$ 向左平移一个单位,或者将 $e^x \geq x + 1$ 两边取对数而来. |

#### ※ 5、证明双变量不等式

(1) 利用变量之间的关系转化(消元或捆绑换元)为单变量的不等式证明;

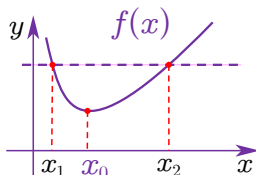
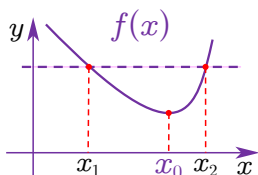
① 当  $x_1 < x_2$  时,令  $t = x_2 - x_1, t \in (0, +\infty)$ ; ② 当  $0 < x_1 < x_2$ ,令  $t = \frac{t_1}{t_2} \in (0, 1)$ .

**(2) 分拆变量,证明极值点偏移**

**① 极值点偏移:**对  $f(x)$  有  $f(x_1) = f(x_2)$  ( $x_1 < x_2$ ),  $x_0$  是函数  $f(x)$  的极值点,且  $x_0 \in (x_1, x_2)$

若  $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$ ,称为极值点右偏;

若  $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$  称为极值点左偏.





## 小课堂

②分拆变量利用单调性证明极值点偏移的思路(以  $x_1 + x_2 < 2x_0$  为例):

i、将所证不等式中的变量分到不等式的两边 ( $x_1 < 2x_0 - x_2$ );

ii、构造对称函数  $g(x) = f(x) - f(2x_0 - x_2)$ ;

iii、利用导数研究函数  $g(x)$  的单调性(单调递增);

iv、由函数  $g(x)$  的单调性判断  $g(x)$  与  $g(x_0)$  的大小 ( $g(x_2) > g(x_0) = 0$ );

v、利用  $f(x)$  单调性反推变量大小,从而  $(f(x_1) = f(x_2) > f(2x_0 - x_2) \implies x_1 + x_2 < 2x_0)$

③对数平均不等式:两个正数  $a$  和  $b$  的对数平均定义:  $L(a, b) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b} (a \neq b) \\ a (a = b) \end{cases}$ , 对数平

均与算术平均、几何平均的大小关系:  $\sqrt{ab} \leq L(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$  此式记为对数平均不等式. 取等条件: 当且仅当  $a = b$  时, 等号成立.

(3) 双变量恒成立、能成立问题的最值等价条件:

①  $\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in B$ , 使得:  $f(x_1) \geq g(x_2)$ , 则:  $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$ ;

②  $\forall x_1 \in A, \exists x_2 \in B$ , 使得:  $f(x_1) \geq g(x_2)$ , 则:  $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$ ;

③  $\exists x_1 \in A, \forall x_2 \in B$ , 使得:  $f(x_1) \geq g(x_2)$ , 则:  $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}$ ;

④  $\exists x_1 \in A, \exists x_2 \in B$ , 使得:  $f(x_1) \geq g(x_2)$ , 则:  $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$ ;

⑤  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 使得:  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a$ , 则:  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a$ ;

⑥  $\exists x_1, x_2 \in A$ , 使得:  $|f(x_1) - f(x_2)| \geq a$ , 则:  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \geq a$ ;

※ 6、抽象函数的导函数构造

①  $xf'(x) + f(x) > 0 \Leftrightarrow [xf(x)]' > 0$ ;  $xf'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]' > 0$

当  $x > 0$  时,  $xf'(x) + nf(x) > 0 \Leftrightarrow [x^n f(x)]' > 0$ ;  $xf'(x) - nf(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x^n}\right]' > 0$

②  $f'(x) + f(x) > 0 \Leftrightarrow [e^x f(x)]' > 0$ ;  $f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' > 0$

$f'(x) + f(x) > a \Leftrightarrow [e^x(f(x) - a)]' > 0$ ;  $f'(x) - f(x) > a \Leftrightarrow \left[\frac{(f(x) + a)}{e^x}\right]' > 0$

③  $\left. \begin{aligned} \sin xf'(x) + \cos xf(x) > 0 \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tan xf'(x) + f(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow [\sin xf(x)]' > 0$

$\left. \begin{aligned} \sin xf'(x) - \cos xf(x) > 0 \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tan xf'(x) - f(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]' > 0$

$\left. \begin{aligned} \cos xf'(x) - \sin xf(x) > 0 \\ f'(x) - \tan xf(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow [\cos xf(x)]' > 0$   $\left. \begin{aligned} \cos xf'(x) + \sin xf(x) > 0 \\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f'(x) + \tan xf(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]' > 0$



## 第五部分 三角函数

小课堂



### 三角函数概念与计算

1、弧度制：半径长等于圆弧弧长的圆心角叫做1弧度的角. 用  $rad$  表示, 读作弧度, 记  $|\alpha|$ .

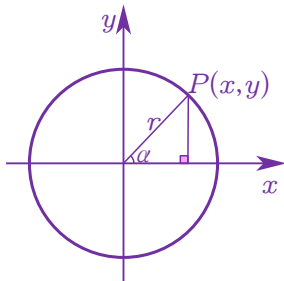
$$|\alpha| = \frac{l}{r} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \quad 1 rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

★ 2、三角函数定义：

正弦函数： $\sin\theta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{y}{r}$

余弦函数： $\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{x}{r}$

正切函数： $\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{y}{x}$



★ 3、同角三角函数的关系：

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

★ 4、三角函数特殊值

| 角度           | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      | $120^\circ$          | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ | $270^\circ$      | $360^\circ$ |
|--------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|------------------|-------------|
| 弧度           | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$      |
| $\sin\alpha$ | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0           | -1               | 0           |
| $\cos\alpha$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          | 0                | 1           |
| $\tan\alpha$ | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | —               | $-\sqrt{3}$          | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0           | —                | 0           |

还需实记的值： $15^\circ(\frac{\pi}{12})$ :  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$   $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$   $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

★ 5、诱导公式口诀：奇变偶不变，符号看象限。

口诀说明：奇指  $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ，偶指  $k\pi$ ；变与不变指三角函数名称的变化；符号是结果的符号；

看象限指看原式三角函数的角度所在的象限对应的三角函数符号。

| 公式一 | $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$                    | $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$                     | $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$ |
|-----|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 公式二 | $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$                     | $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$                      | $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$   |
| 公式三 | $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$                          | $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$                            | $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$       |
| 公式四 | $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$                      | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$                      | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$  |
| 公式五 | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$  |                                     |
| 公式六 | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ |                                     |

总结：正弦、余弦的诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin\alpha, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\alpha, \end{cases} \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos\alpha, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin\alpha, \end{cases}$$





## 小课堂



## 三角函数图像与性质

★ 1、三角函数图像性质 (书写规律: 基准 (离  $y$  轴最近的正值) + 周期)

|      | $y = \sin x$                                                                            | $y = \cos x$                                                        | $y = \tan x$                                   |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 图 象  |                                                                                         |                                                                     |                                                |
| 定义域  | $R$                                                                                     | $R$                                                                 | $\{x   x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$ |
| 值 域  | $[-1, 1]$                                                                               | $[-1, 1]$                                                           | $R$                                            |
| 最 值  | $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, y_{\max} = 1$<br>$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, y_{\min} = -1$ | $x = 2k\pi$ 时, $y_{\max} = 1$ ;<br>$x = 2k\pi + \pi, y_{\min} = -1$ | 既无最大也无最小                                       |
| 周期性  | $2\pi$                                                                                  | $2\pi$                                                              | $\pi$                                          |
| 奇偶性  | 奇函数                                                                                     | 偶函数                                                                 | 奇函数                                            |
| 单增区间 | $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$                                        | $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$                                             | $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ |
| 单减区间 | $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$                                       | $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$                                              | 无                                              |
| 对称轴  | $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$                                                    | $x = k\pi (k \in Z)$                                                | 无                                              |
| 对称中心 | $(k\pi, 0)$                                                                             | $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$                                         | $(\frac{k\pi}{2}, 0)$                          |

★ 2、三角函数的平移变换 (自变量左加右减, 因变量上加下减)

$$(1) \text{ 先伸缩后平移: } y = \sin x \xrightarrow{\text{纵坐标变为原来 } A \text{ 倍}} y = A \sin x \xrightarrow{\text{横坐标变为原来 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = A \sin \omega x$$

$$\xrightarrow{\text{向左(右)平移 } \frac{\varphi}{\omega} \text{ 个单位}} y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

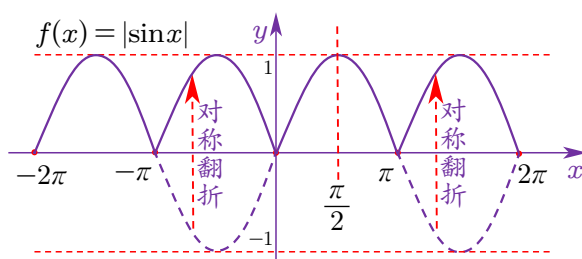
$$(2) \text{ 先平移后伸缩: } y = \sin x \xrightarrow{\text{纵坐标变为原来 } A \text{ 倍}} y = A \sin x \xrightarrow{\text{向左(右)平移 } \varphi \text{ 个单位}} y = A \sin(x + \varphi)$$

$$\xrightarrow{\text{横坐标变为原来 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

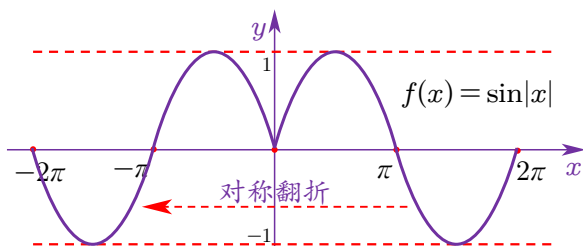
定理:  $y = A \sin(\omega x + \varphi_1) \rightarrow y = A \sin(\omega x + \varphi_2)$  则平移单位为  $\frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{\omega}$  (注意平移方向)

※ 3、三角函数的翻折变换

(1)  $f(x) = |\sin x|$  的图像由  $f(x) = \sin x$  图像作  $x$  轴的对称翻折得到.



(2)  $f(x) = \sin|x|$  的图像由  $f(x) = \sin x$  图像作  $y$  轴的对称翻折得到.



## 小课堂



## 正余弦型三角函数

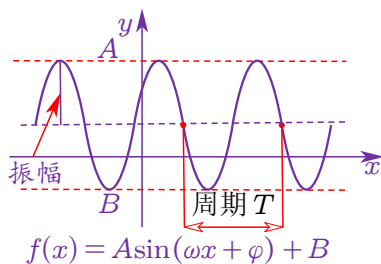
★ 1、正弦型三角函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$

(1)  $A$  (振幅): 振动物体离开平衡位置的最大距离.

$\omega x + \varphi$  (相位): 振动物体任意时刻的状态.

$\varphi$  (初相): 振动物体初始时刻的状态.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  (周期): 振动物体往复一次的时间.



(2) 待定系数法求正弦型函数解析式

$$2A = f(x)_{\max} - f(x)_{\min}$$

$$2B = f(x)_{\max} + f(x)_{\min}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (从图中读出周期, 一般是 } \frac{1}{2}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T)$$

$$\varphi \text{ 最值点 (零点) 法: } \omega x_0 + \varphi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{3\pi}{2} \right)$$

2、正 (余) 弦型三角函数性质 (运用换元法: 令  $\theta = \omega x + \varphi$  转化为正 (余) 弦三角函数)

|       | $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$                                                                              | $y = A\cos(\omega x + \varphi) + b$                                                   |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 周 期   | $\frac{2\pi}{\omega}$                                                                                            | $\frac{2\pi}{\omega}$                                                                 |
| 最大值   | $A + b$ , 当 $x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}$ 取得                                              | $A + b$ , 当 $x = \frac{2k\pi - \varphi}{\omega}$ 取得                                   |
| 最小值   | $-A + b$ , 当 $x = \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \varphi}{\omega}$ 取得                                            | $-A + b$ , 当 $x = \frac{2k\pi + \pi - \varphi}{\omega}$ 取得                            |
| 单调增区间 | $\left[ \frac{2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}, \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega} \right]$  | $\left[ \frac{2k\pi - \pi - \varphi}{\omega}, \frac{2k\pi - \varphi}{\omega} \right]$ |
| 单调减区间 | $\left[ \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}, \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \varphi}{\omega} \right]$ | $\left[ \frac{2k\pi - \varphi}{\omega}, \frac{2k\pi + \pi - \varphi}{\omega} \right]$ |
| 对称轴   | $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}$                                                              | $x = \frac{k\pi - \varphi}{\omega}$                                                   |
| 对称中心  | $\left( \frac{k\pi - \varphi}{\omega}, b \right)$                                                                | $\left( \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - \varphi}{\omega}, b \right)$                     |





### 小课堂



## 三角恒等变换

### ★ 1、和差角公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

### ★ 2、二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\implies \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\implies 1 \pm \sin 2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \pm 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\implies \text{升幂公式 } 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\implies \text{降幂公式 } \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}, \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

### 3、万能代换公式

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

### 4、辅助角公式

#### ★ (1) 一次辅助角公式：

$$f(x) = a\sin\omega x \pm b\cos\omega x$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega x \pm \varphi)$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

#### (2) 二次辅助角公式：

$$f(x) = a\sin\omega x\cos\omega x \pm b\cos^2\omega x (a, b > 0)$$

$$f(x) = \frac{a}{2}\sin 2\omega x \pm \frac{b}{2}(\cos 2\omega x + 1) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \sin(2\omega x \pm \varphi) \pm \frac{b}{2} \left( \tan\varphi = \frac{b}{a} \right)$$



## 第六部分 数 列



### 等差与等比数列

#### ★ 1、等差与等比数列

|          | 等 差 数 列                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 等 比 数 列                                                                                                                                                                                                                           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 定 义      | 后一项与前一項的差为常数<br>$a_{n+1} - a_n = d$                                                                                                                                                                                                                                                                    | 后一项与前一項的比为常数<br>$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$                                                                                                                                                                                         |
| 通 项      | $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$                                                                                                                                                                                                                                                                    | $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$                                                                                                                                                                                                 |
| 求和<br>公式 | $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $= na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$ $= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$                                                                                                                                                                                                 | $S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} (q \neq 1) \end{cases}$                                                                                                                       |
| 中 项      | 如果 $a, b, c$ 成等差数列, 则 $2b = a + c$                                                                                                                                                                                                                                                                     | 如果 $a, b, c$ 成等比数列, 则 $b^2 = ac$                                                                                                                                                                                                  |
| 性 质      | 若 $m+n=p+q$ , 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$                                                                                                                                                                                                                                                                | 若 $m+n=p+q$ , 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$                                                                                                                                                                                   |
| 充要<br>条件 | ① $\{a_n\}$ 为等差数列<br>$\iff S_n = an^2 + bn$ (无常数)<br>② 若有 $S_n = an^2 + bn + c$<br>$\iff \{a_n\}$ 是以 $a_2$ 为首項的等差数列<br>③ 若有 $S_n = Aa_n^2 + \frac{1}{2}a_n + C$<br>$\iff \{a_n\}$ 是等差数列, 且 $d = \frac{1}{2A}$                                                                                          | ① 若 $S_n = Aa_n + B$ , 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.<br>② 若 $S_n = Aa_n (A \neq 0)$ , 则 $\{a_n\}$ 是从第二項 $a_2$ 为首項的等比数列.<br>③ $S_n = A \cdot q^n + B$ , 当且仅当 $A = -B$ 时, $\{a_n\}$ 是等比数列; 当且仅当 $A \neq -B$ 时, $\{a_n\}$ 是从第二項 $a_2$ 为首項的等比数列. |
| 补充<br>公式 | $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}; a_n = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$                                                                                                                                                                                                                                                | $S_{m+n} = S_m + q^m S_n = S_n + q^n S_m$                                                                                                                                                                                         |
| 数列<br>最值 | ① $S_n$ 有最大值 $\iff \begin{cases} a_n > 0 \\ a_{n+1} < 0 \end{cases}; S_n$ 有最小值 $\iff \begin{cases} a_n < 0 \\ a_{n+1} > 0 \end{cases}$<br>② $S_n > 0$ , $n$ 的最大值 $\iff \begin{cases} S_n > 0 \\ S_{n+1} < 0 \end{cases}; S_n < 0$ , $n$ 的最大值 $\iff \begin{cases} S_n < 0 \\ S_{n+1} > 0 \end{cases}$ . |                                                                                                                                                                                                                                   |

#### 2、和数列与积数列

|     | 和数列                                                                                                                           | 积数列                                                                                                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 定 义 | 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = f(n)$ 称和数列                                                                                   | 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+1} = f(n)$ 称为积数列                                                                                                |
| 通 项 | $a_n + a_{n+1} = f(n) = An + B$ 时,<br>则 $a_{n-1} + a_n = A(n-1) + B$ , 两式相减得: $a_{n+1} - a_{n-1} = A$ , 故 $\{a_n\}$ 是隔項的等差数列, | $a_n a_{n+1} = f(n) = q^n$ 时, 则 $a_{n-1} a_n = q^{n-1}$ ,<br>两式相除得: $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = q$ , 故 $\{a_n\}$ 是隔項的等比数列, 公比为 $q$ ;       |
| 公 式 | $a_n = \begin{cases} a_1 + A(\frac{n+1}{2} - 1) & n \text{ 为奇数} \\ a_2 + A(\frac{n}{2} - 1) & n \text{ 为偶数} \end{cases}$      | $\therefore a_n = \begin{cases} a_1 \cdot q^{\frac{n+1-1}{2}} & n \text{ 为奇数} \\ a_2 \cdot q^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ |

#### 小 课 堂







## 小课堂

$S_n$ 法中题目所给有时是关系式

eg:  $S_n = 2n^2 + 1$ , 有时是递推式

eg:  $S_n = 2a_n + 1$ 。关系式可

直接得到  $a_n$ , 而递推式只能

得到方程型关系。



## 数列通项公式

### ★ 1、 $S_n$ 法求数列通项:

(1) 适用条件: 适用题目所给关系式中含有  $S_n$  的情况.

(2) 核心步骤: ① 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1$

② 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$

③ 检验, 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1$ , 是否满足  $a_n$

### ※ 2、构造法求数列通项:

(1) 适用条件: 适用题目所给关系式为:  $a_{n+1} = pa_n + q$

(2) 核心步骤: 将题目的式子变形为:  $a_{n+1} = pa_n + q$

$$a_{n+1} + A = p(a_n + A)$$

$$\frac{a_{n+1} + A}{a_n + A} = p \quad A = \frac{q}{p-1}$$

所以  $\{a_n + A\}$  是以  $a_1 + A$  为首项, 以  $p$  公比的等比数列

### (3) 构造法的引申

|      | 等差后缀                                                                                                                                                                                  | 等比后缀                                                                                                                                                                                                                                     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 关系式  | $a_{n+1} = pa_n + dn + q$                                                                                                                                                             | $a_{n+1} = pa_n + q^n$                                                                                                                                                                                                                   |
| 递推步骤 | $a_{n+1} = pa_n + dn + q$<br>$a_{n+1} + x(n+1) + y = p[a_n + xn + y]$<br>$\frac{a_{n+1} + x(n+1) + y}{a_n + xn + y} = p$<br>所以 $\{a_n + xn + y\}$ 是以 $a_1 + x + y$ 为首项, 以 $p$ 公比的等比数列 | 左右两边同时除以 $q^{n+1}$ ,<br>得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \times \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$<br>令 $b_n = \frac{a_n}{q^n}$ , 则有 $b_{n+1} = \frac{p}{q}b_n + \frac{1}{q}$<br>对 $b_{n+1} = \frac{p}{q}b_n + \frac{1}{q}$ 运用基础构造法. |

### ※ 3、倒数变换法求数列通项

(1) 适用条件: 适用题目所给关系式为  $a_{n+1} = \frac{pa_n}{da_n + q}$  (分子只有一项).

(2) 核心步骤: 左对两边同时取分之一转化为新数列.

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{da_n + q}{pa_n} \implies \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{p} \times \frac{1}{a_n} + \frac{d}{p}$$

若  $p = q$ , 则数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  是以  $\frac{1}{a_1}$  为首项, 以  $\frac{d}{p}$  为公差的等差数列;

若  $p \neq q$ , 令数列  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 上式转化为  $b_{n+1} = \frac{p}{q}b_n + \frac{d}{p}$ , 继续运用构造法即可求出数列  $\{a_n\}$ .

### ※ 4、整体除法求数列通项

(1) 适用条件: 适用所给关系式中含有数列积的式子. 例如  $a_n a_{n+1}$

(2) 核心步骤: ① 左对两边同时除以题目的数列积, 转化为新数列.

② 新数列为等差数列, 用等差数列求解方法求解





## 5、累(叠)乘法求数列通项

(1) 适用条件: 适用题目所给关系式为:  $a_{n+1} = f(n) \times a_n$  (等比数列的广义形式)

(2) 核心步骤: 将题目的式子变形为:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$

$$\text{类比: } \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1)$$

$$\begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \times) \frac{a_2}{a_1} = f(1) \end{array}$$

-----

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \therefore a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$$

## 6、累(叠)加法求数列通项

(1) 适用条件: 适用题目所给关系式为:  $a_{n+1} = f(n) + a_n$  (等差数列的广义形式)

(2) 核心步骤: 将题目的式子变形为:  $a_{n+1} - a_n = f(n)$

类比得:

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1)$$

.....

$$+) a_2 - a_1 = f(1)$$

-----

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \therefore a_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + a_1$$

## ※ 7、数学归纳法(先猜后证)求数列通项

(1) 数学归纳法: 直接证明的方法, 用于证明与正整数有关的数学命题.

概括起来就是 “两个步骤, 一个结论.”

(2) 核心步骤:

- ① 证明当  $n$  取第一个值  $n_0$  (例如  $n_0 = 1$  或  $2$  等) 时结论正确;
- ② 假设当  $n = k$  ( $k \in N^*$ , 且  $k \geq n_0$ ) 时结论正确. 证明当  $n = k + 1$  时结论也正确.
- ③ 由①和②可知命题对从  $n_0$  开始的所有正整数  $n$  都成立. 命题得证.

小课堂





## 小课堂

## 8、其它递推数列通项公式

| 数 列                                                                | 数列通项公式                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$                              | <p>不动点递推法. 令: <math>a_{n+1} = a_n = x</math>, 即 <math>cx^2 - (a-d)x - b = 0</math>; 解出两个根为 <math>\alpha, \beta</math>.</p> <p>(1) 当 <math>\alpha \neq \beta</math> 时, <math>\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = k \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}</math> (<math>k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}</math>), 数列 <math>\left\{ \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \right\}</math> 是以 <math>\frac{a_1 - \alpha}{a_1 - \beta}</math> 为首项, <math>k</math> 为公比的等比数列.</p> <p>(2) 当 <math>\alpha = \beta</math> 时, <math>\frac{1}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{a_n - \alpha} + k</math> (<math>k = \frac{c}{ac + d}</math>), 数列 <math>\left\{ \frac{1}{a_n - \alpha} \right\}</math> 是以 <math>\frac{1}{a_1 - \alpha}</math> 为首项, <math>k</math> 为公差的等差数列.</p> |
| $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$<br>$a_1 = a, a_2 = b$                  | <p>(1) 当 <math>p + q = 1</math> 时, <math>a_n = a + \frac{(b-a)[1 - (-q)^{n-1}]}{1+q}</math>.</p> <p>(2) 当 <math>p + q \neq 1</math> 时, 设 <math>a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1})</math> 与 <math>a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}</math> 比较, 得 <math>\begin{cases} \alpha \cdot \beta = -q \\ \alpha + \beta = p \end{cases}</math>, 可知: <math>\alpha, \beta</math> 是方程 <math>x^2 - px - q = 0</math> 的两根, 容易求得 <math>\alpha, \beta</math>.</p> <p>当 <math>\alpha \neq \beta</math> 时, 特征根解方程法: 令 <math>a_n = x \cdot \alpha^n + y \cdot \beta^n</math>, 将 <math>a_1, a_2</math> 代入即可.</p> <p>当 <math>\alpha = \beta</math> 时, 特征根解方程法: 令 <math>a_n = (xn + y)\alpha^n</math>, 将 <math>a_1, a_2</math> 代入即可.</p>                                     |
| $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$<br>$F_0 = F_1 = 1$<br>斐波那契数列<br>(黄金分割数列) | <p>(1) 定义: 一个数列, 前两项都为 1, 从第三项起, 每一项都是前两项之和.</p> <p>(2) 通项公式: <math>F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]</math></p> <p>(3) 性质: <math>a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1} + A$<br>$a_1 = a, a_2 = b$              | <p>(1) 当 <math>p + q = 1</math> 时, <math>a_{n+1} - a_n = -q(a_n - a_{n-1}) + A</math>, 继续构造法, 迭加法求出 <math>a_n</math>.</p> <p>(2) 当 <math>p + q \neq 1</math> 时, 设 <math>a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1}) + A</math><br/> <math>\alpha, \beta</math> 是方程 <math>x^2 - px - q = 0</math> 的两根, 容易求得 <math>\alpha, \beta</math>.<br/>                     当 <math>\alpha \neq \beta</math> 时, 特征根解法: <math>a_n = x \cdot \alpha^n + y \cdot \beta^n + z</math>, 代入 <math>a_1, a_2, a_3</math> 可解.<br/>                     当 <math>\alpha = \beta</math> 时, 特征根法: <math>a_n = (xn + y)\alpha^n + z</math>, 代入 <math>a_1, a_2, a_3</math> 可解.</p>                                                                                                 |
| 周期数列                                                               | <p>数列 <math>\{a_n\}</math> 满足: <math>a_{n+2} = a_{n+1} - a_n (n \in N^*)</math>、<math>a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} (n \geq 3)</math> 则 <math>\{a_n\}</math> 是周期为 6 的数列, 计算出前 6 个数列值, 整个数列就都知道了.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |



## 数列求和方法

### ★ 1、公式法求和

(1) 适用条件: 适用题目所求为等差或等比数列的直接求和.

(2) 核心步骤: 等差:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d$

$$\text{等比: } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} & q \neq 1 \\ a_1 n q & q = 1 \end{cases}$$



## ※ 2、需实记的数列和

**自然数列的和:**  $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**平方数列的和:**  $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

**立方数列的和:**  $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

**奇数列的和:**  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

## 3、倒序相加法求和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ +) S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \\ \therefore S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad \because a_n = a_1 + (n-1)d \quad \therefore S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d \end{aligned}$$

## ★ 4、错位相减法求和

(1) **适用条件:** 适用于题目所给数列通项结构为等差  $\times$  等比的数列求和.

(2) **核心步骤:** 左边乘以公比, 右边错开一位相减.

设数列为  $a_n = (an + b)q^n$ , 则  $S_n = \left( \frac{an}{q-1} + \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right) \cdot q^{n+1} - \left( \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right) \cdot q$

设数列为  $a_n = (an + b)q^{n-1}$ , 则  $S_n = \left( \frac{an}{q-1} + \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right) \cdot q^n - \left( \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right)$

(3) **格式步骤如下:** 以  $a_n = (an + b)q^n$  为例

① 表示  $S_n$ :  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$$S_n = (a+b)q + (2a+b)q^2 + (3a+b)q^3 + \cdots + (an+b)q^n$$

② 表示  $qS_n$ :  $qS_n = (a+b)q^2 + (2a+b)q^3 + \cdots + (a(n-1)+b)q^n + (an+b)q^{n+1}$

③ 相减式:  $(1-q)S_n = (a+b)q + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^n - (an+b)q^{n+1}$

④ 套公式:  $S_n = \left( \frac{an}{q-1} + \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right) \cdot q^{n+1} - \left( \frac{b}{q-1} - \frac{a}{(q-1)^2} \right) \cdot q$

## ★ 4、裂项相消法求和

(1) **适用条件:** 适用于题目所给数列通项结构为分式形式的数列求和.

(2) **核心步骤:** 需把题目所给数列通项结构进行列项. 其中:  $k = \frac{1}{\text{大分母} - \text{小分母}}$

$$\text{列项公式: } \frac{1}{\text{小分母} \times \text{大分母}} = k \left( \frac{1}{\text{小分母}} - \frac{1}{\text{大分母}} \right)$$

(3) **常见放缩方式:**

① 形如  $\frac{1}{(n+1)^2}$ , 常放缩为  $\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ;

② 形如  $\frac{k}{a+q^n}$ , 常放缩为  $\frac{k}{q^n}$ , 譬如  $\frac{1}{3^n} > \frac{1}{3^n+1} \geq \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}}$

③ 形如  $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , 常放缩为  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

小课堂





## 小课堂

向量数量积中的“不是乘法”



# 几何学

## 第一部分 平面向量



### 向量及其运算

#### ★ 1. 向量的基本运算

| 运 算      | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                                                            | 坐标语言                                                                                                                                                      |
|----------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 加减法      |      | $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$<br>$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$                                                                                            | 记 $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ , $\vec{OB} = (x_2, y_2)$<br>则 $\vec{OA} + \vec{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$<br>$\vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ |
|          |      | $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$                                                                                                                                | 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则:<br>$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$<br>$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$    |
| 实数与向量的乘积 |      | $\vec{AB} = \lambda \vec{a} (\lambda \in R)$                                                                                                                    | 记 $\vec{a} = (x, y)$ , 则 $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$                                                                                   |
| 向量数量积    |      | $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$                                                                       | 记 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则:<br>$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$                                                     |
| 向量夹角     |      | $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} }$                                                                                               | 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则:<br>$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$       |
| 向量模长     |      | $ \vec{a}  = \sqrt{(\vec{a})^2}$<br>$ \vec{a} \pm \vec{b}  = \sqrt{(\vec{a} \pm \vec{b})^2}$<br>$= \sqrt{ \vec{a} ^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} +  \vec{b} ^2}$ | $ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2}$                                                                                                                            |

#### ※ 2. 极化恒等式

(1) 概念: 设  $\vec{a}, \vec{b}$  是两个平面向量, 则有恒等式:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$

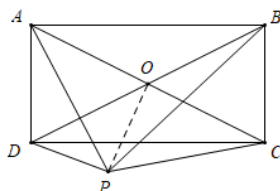
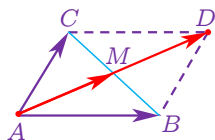
(2) 几何意义: 向量的数量积为和对角线与差对角线平方差的  $\frac{1}{4}$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [|\vec{AD}|^2 - |\vec{BC}|^2]$$

(3) 空间几何与极化恒等式: 在矩形  $ABCD$  中, 若对角线  $AC$  和  $BD$  交于点

$O$ ,  $P$  为平面内任意一点, 有以下两个重要的向量关系:

$$\textcircled{1} PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 ; \quad \textcircled{2} \vec{PA} \cdot \vec{PC} = \vec{PB} \cdot \vec{PD}.$$





### ★ 1、平面向量基本定理

如果两个向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不共线,那么向量  $\vec{p}$  与向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  共面的充要条件是:存在唯一实数对  $x$ 、 $y$ ,使  $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 。

由此,可得下列结论:对空间任意两个向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  (共线)  $\iff$  存在实数  $\lambda$  使  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ 。

### 2、共线问题

(1)  $P$ 、 $A$ 、 $B$  三点共线  $\iff AP \parallel AB \iff \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 。

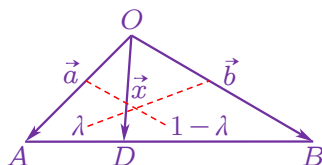
证明方法:

坐标方法:设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $P(x, y)$  三点共线,则:  $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ ,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \iff \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda} \iff \overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \quad \text{其中: } t = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

(2) 定理应用:平面上  $O$ 、 $A$ 、 $B$  三点不共线,  $D$  在直线  $AB$

上,且  $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ , 令  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{x}$ , 则有  $\vec{x} = \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{a}$ . 其表达意思就是从顶点  $O$  引出三个向量,且它们共线,每一个向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  分别乘它对面的比值。

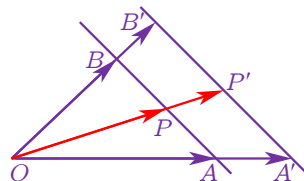


### ※ 3、等和线

平面内一组基底  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  及任一向量  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$  ( $\lambda, \mu \in R$ ), 若点  $P$  在直线  $AB$  上或平行于  $AB$  的直线上,则  $\lambda + \mu = k$  (定值), 反之也成立,

把直线  $AB$  以及与直线  $AB$  平行的直线称为等和线.  $k = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$

- ① 当等和线恰为直线  $AB$  时,  $k = 1$ ;
- ② 当等和线在  $O$  点和直线  $AB$  之间时,  $k \in (0, 1)$ ;
- ③ 当直线  $AB$  在  $O$  点和等和线之间时,  $k \in (1, +\infty)$ ;
- ④ 当等和线过  $O$  点时,  $k = 0$ ;



### ★ 4、平面向量的平行与垂直

| 位置关系 | 平行(共线)                     | 垂 直                         |
|------|----------------------------|-----------------------------|
| 图 示  |                            |                             |
| 符号语言 | $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ |
| 坐标语言 | $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$      | $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$       |
| 记忆口诀 | 交叉相乘差为零                    | 对应相乘和为零                     |





## 小课堂



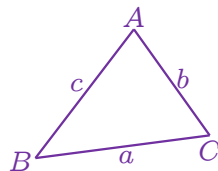
## 向量法研究三角形性质

1、三角形基础知识：在  $\triangle ABC$  中，记角  $A, B, C$  所对的边长为： $a, b, c$

(1) 内角和定理： $A + B + C = \pi$

(2) 大边对大角，大角对大边，即： $A > B \implies a > b$ ，等边对等角，即  $B = C \implies b = c$

(3) 两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，即： $\begin{cases} a + b > c \\ a - b < c \end{cases}$



2、三角形三心：设  $O$  为  $\triangle ABC$  所在平面上一点，角  $A, B, C$  所对边长分别为  $a, b, c$ ，则

### ★ (1) 重心：

① 概念：三角形三条边中线的交点。

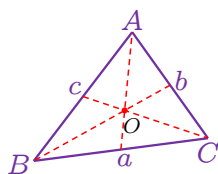
② 重心向量表达： $O$  为  $\triangle ABC$  的重心  $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ 。

③ 重心的性质：

1) 重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为  $2 : 1$ 。

2) 重心和三角形 3 个顶点组成的 3 个三角形面积相等。

3)  $\triangle ABC$  中  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，重心的坐标是  $G(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$



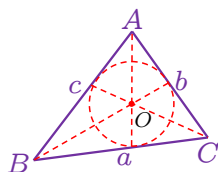
### ★ (2) 内心：

① 概念：三角形内切圆圆心，三内角角平分线交点。

② 内心向量表达： $O$  为  $\triangle ABC$  的内心  $\Leftrightarrow a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC} = \vec{0}$ 。

③ 内心的性质：1) 内心到三角形边的距离相等

2) 三角形面积与内切圆半径关系： $S_{\triangle} = \frac{1}{2}Cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r$



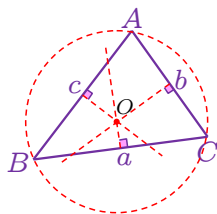
### ★ (3) 外心：

① 概念：三角形外接圆圆心，三条边垂直平分线交点。

② 外心向量表达： $O$  为  $\triangle ABC$  的外心  $\Leftrightarrow \vec{OA}^2 = \vec{OB}^2 = \vec{OC}^2$ 。

③ 外心的性质：1) 外心到三角形三顶点的距离相等

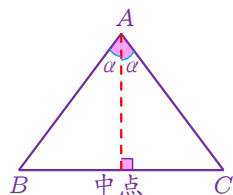
2) 三角形面积与外接圆半径关系： $S_{\triangle} = \frac{abc}{4r}$



## 3、特殊三角形

### (1) 等腰等边三角形

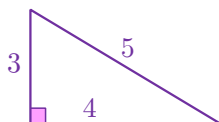
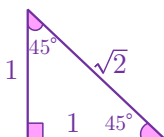
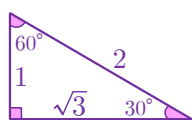
等腰等边三角形三线合一：中线、高线、角平分线合为一条线。



### (2) 直角三角形

① 在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半。

② 在直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方。

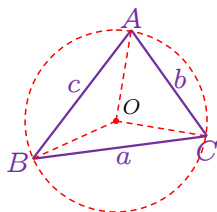




## 解三角形

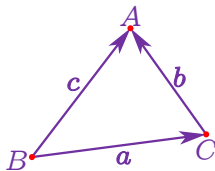
### ★ 1、正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (R \text{ 为外接圆半径})$$



### ★ 2、余弦定理

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A & \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B & \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C & \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$



### ★ 3、面积定理

直接求解式:  $S = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

坐标运算式:  $S = \frac{1}{2} \times \text{水平宽} \times \text{铅锤高}$

三角运算式:  $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$

海伦公式:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$

向量运算式:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_1, y_1), \overrightarrow{AC} = \vec{b} = (x_2, y_2)$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

### ※ 4、三角形内角和定理

在  $\triangle ABC$  中, 有  $A + B + C = \pi \iff \begin{cases} C = \pi - (A + B) \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \\ 2C = 2\pi - 2(A + B) \end{cases}$

互补关系:  $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C \quad \cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

互余关系:  $\sin \frac{A+B}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2} \quad \cos \frac{A+B}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \sin \frac{C}{2}$

### ※ 5、两个重要模型

(1) 三角形周长的求解: 三角形周长等于三边和, 但是有的时候需要转化。

$$\text{周长} = a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

模型:  $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 \end{cases} \implies (b + c)^2 = a^2 + 2bc + 2bc \cos A$

(2) 三角形面积最值: 均值不等式求面积: 均值不等式结合完全平方公式运算

模型:  $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ c^2 + b^2 \geq 2bc \end{cases} \implies b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$

等量代换:  $a^2 + 2bc \cos A \geq 2bc \implies bc \leq \frac{a^2}{2 - 2 \cos A}$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \therefore S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{2 - 2 \cos A} \times \sin A$$

### 小课堂





## 第二部分 复数



### 小课堂

共轭复数的性质:

$$(1) |x + yi| = |x - yi|$$

$$(2) (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

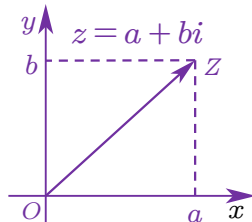


### 复数概念与计算

#### 1、概念

**复数:**把形如  $z = a + bi$  ( $a, b$  均为实数) 的数称为复数, 其中  $a$  称为实部,  $b$  称为虚部,  $i$  称为虚数单位. 当  $z$  的虚部等于零时, 常称  $z$  为实数; 当  $z$  的虚部不等于零时, 实部等于零时, 常称  $z$  为纯虚数. 称复数  $\bar{z} = a - bi$  为  $z$  的共轭复数.

**复平面:**记复数  $z = a + bi$  对应的坐标为  $(a, b)$ . 用水平的实轴与垂直的虚轴建立起来的坐标系称为复平面. 复数  $z = a + bi$  可以表示为向量  $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$ . 复平面上的点与复数一一对应.



**模运算:**将复数的实部与虚部的平方和的正的平方根的值称为该复数的模, 记作  $|z|$ . 即对于复数  $z = a + bi$ , 它的模:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

#### ★ 2、复数运算

**加减法则:**  $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ ;

**乘法法则:**  $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$ ;

**除法法则:**  $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

**乘方法则:**  $i^2 = -1$ ,  $i^n = i^{4k+r} = i^r$

**幂运算:**  $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ ;  $(z^m)^n = z^{mn}$ ;  $(z_1 \cdot z_2)^m = z_1^m z_2^m (m, n \in \mathbb{N})$ ;

#### 3、几个重要的结论:

$$(1) (1 \pm i)^2 = \pm 2i \quad \frac{1+i}{1-i} = i \quad \frac{1-i}{1+i} = -i;$$

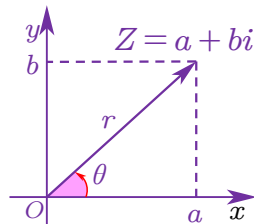
$$(2) i \text{ 性质: } T = 4; i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i; i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0;$$



### 复数的三角表示

#### 1、概念:

一般地, 任何一个复数  $z = a + bi$  都可以表示成  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  的形式. 其中,  $r$  是复数的模;  $\theta$  是以  $x$  轴的非负半轴为始边, 向量  $\overrightarrow{OZ}$  所在射线 (射线  $OZ$ ) 为终边的角, 叫做复数  $z = a + bi$  的辐角.  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$  叫做复数  $z = a + bi$  的三角表示式, 简称三角形式. 为了与三角形式区分开来,  $a + bi$  叫做复数的代数表示式, 简称代数形式.



$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$





## ※ 2、棣莫佛定理

对于复数  $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  有  $z$  的  $n$  次幂:  $Z = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$  ( $n \in N_+$ )

$$\text{若: } Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\text{则 } Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

## ※ 3、复数的开方运算

$$(1) \text{ 若: } \sqrt[n]{z} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}}, \text{ 则: } \omega_k = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$(2) 1 \text{ 的 } n \text{ 次方根: } 1 \text{ 的 } n \text{ 次方根在复数域内是 } e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

小课堂



1 的三次方根:  $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$





## 小课堂

# 第三部分 立体几何与空间向量



## 空间几何体的结构特征

### ★ 1. 空间几何体的结构和计算

| 结构特征 |    |                                               | 图示 | 表面积体积                                                                                                                                                                  |
|------|----|-----------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 柱体   | 棱柱 | 两底面相互平行,其余各面都是平行四边形;侧棱平行且相等.                  |    | $S_{\text{柱表}} = 2S_{\text{底面积}} + S_{\text{侧面积}}$ $V_{\text{柱}} = S_{\text{底}}h$                                                                                      |
|      | 圆柱 | 两底面相互平行;以矩形一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的曲面所围成的几何体.     |    | $S_{\text{柱表}} = 2S_{\text{底面积}} + S_{\text{侧面积}}$ $= 2\pi r l + 2\pi r^2$ $= 2\pi r(r + l)$ $V_{\text{柱}} = S_{\text{底}}h$                                            |
| 锥体   | 棱锥 | 底面是多边形,各侧面均是三角形;各侧面有一个公共顶点.                   |    | $S_{\text{锥表}} = S_{\text{底面积}} + S_{\text{侧面积}}$ $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$                                                                                       |
|      | 圆锥 | 底面是圆;以直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴,其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体. |    | $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \alpha r^2$ $S_{\text{锥表}} = \pi r l + \pi r^2$ $= \pi r(r + l)$ $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$                           |
| 台体   | 棱台 | 两底面相互平行;是用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面和截面之间的部分.        |    | $S_{\text{台表}} = S_{\text{底面积}} + S_{\text{侧面积}}$ $V = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}} + S_{\text{下}})h$                                    |
|      | 圆台 | 两底面相互平行;用一平行圆锥底面的平面截圆锥,底面和截面之间的部分.            |    | $S_{\text{侧}} = \pi(R + r)l$ $S_{\text{台表}} = \pi r l + \pi r^2 + \pi R l + \pi R^2$ $V = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}} + S_{\text{下}})h$ |
| 球    |    | 球心到球面上各点的距离相等;是以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的几何体.  |    | $S_{\text{球表}} = 4\pi R^2$ $V_{\text{球体}} = \frac{4}{3}\pi R^3$                                                                                                        |



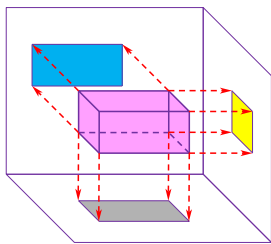
## ★ 2、三视图

(1) **三视图**: 观测者从不同位置观察同一个几何体, 画出的空间几何体的图形, 包括:

**主视图**: 物体前后方向投影所得投影图, 反映物体的高度和长度

**左视图**: 物体左右方向投影所得投影图, 反映物体的高度和宽度

**俯视图**: 物体上下方向投影所得投影图, 反映物体的长度和宽度



## 3、直观图

(1) **概念**: 一个物体, 从直观看上去的图形, 叫做直观图. 分为平行投影下画出的直观图和中心投影画出的直观图, 画直观图的方法叫做斜二测画法.

(2) **作图规则**:

- ① 在已知图像中取互相垂直的  $x$  轴和  $y$  轴, 两轴相交于点  $O$ , 画直观图时, 画出相应的  $x'$  轴和  $y'$  轴, 两轴相交于  $O'$ , 且使  $\angle x'O'y' = 45^\circ$  或  $135^\circ$ , 它们确定的平面表示水平面.
- ② 图形中平行于  $x$  轴或  $y$  轴的线段, 在直观图中分别画出平行于  $x'$  轴和  $y'$  轴的线段.
- ③ 原图形中平行于  $x$  轴的线段在直观图中长度不变, 平行于  $y$  轴线段变成原来的一半.

## ※ 5、正四面体的性质 (棱长为 $a$ )

- ① 全面积  $S = \sqrt{3}a^2$ ;
- ② 体积  $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ;
- ③ 对棱间的距离  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ;
- ④ 相邻面所成二面角  $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$
- ⑤ 外接球半径  $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ;
- ⑥ 内切球半径  $r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ;
- ⑦ 正四面体内任一点到各面距离之和为定值  $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ .

## 小课堂





## 小课堂



## 空间点线面位置关系

### ★ 1、线面平行

|      | 文字语言                                        | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                                    |
|------|---------------------------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 判定定理 | 平面外一条直线与此平面内的一条直线平行, 则直线与此平面平行.             |      | $\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$ |
| 性质定理 | 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 则直线就和交线平行. |      | $\left. \begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$ |

### ★ 2、面面平行

|      | 文字语言                            | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                                                                           |
|------|---------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 判定定理 | 一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行, 则这两个平面平行. |      | $\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a \parallel \beta, b \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ |
| 性质定理 | 如果两个平行平面与第三个平面相交, 那么它们的交线平行     |      | $\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$                             |

### ★ 3、线面垂直

|      | 文字语言                                  | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                                                                                                    |
|------|---------------------------------------|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 判定定理 | 一条直线与平面内的两条相交直线都垂直, 则该直线与此平面垂直.       |      | $\left. \begin{array}{l} a \cap b = O \\ a, b \subset \alpha \\ a \perp l \\ b \perp l \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$                                                                 |
| 推论   | 如果在两条平行直线中, 有一条垂直于平面, 那么另一条直线也垂直这个平面. |      | $\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$                                                                                               |
| 性质定理 | 直线垂直于平面, 则, 直线与平面内任意一条直线垂直.           |      | $\left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l \perp a \\ l \perp b \\ \dots \end{array} \right.$ |



## ★ 4、面面垂直

|      | 文字语言                            | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                                                  |
|------|---------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 判定定理 | 一个平面过另一个平面的一条垂线,则这两个平面互相垂直.     |      | $\left. \begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$                                       |
| 性质定理 | 两个平面互相垂直,则一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面 |      | $\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = a \\ l \perp a \\ \alpha \perp \beta \\ l \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$ |

### 小课堂



### 几何法求空间角与距

#### ★ 1、几何法求异面直线夹角:

(1) 异面直线所成角的范围  $[0^\circ, 90^\circ]$

(2) 平移法求异面直线夹角: 通过平移将问题转化到三角形中, 用正余弦定理解三角形  
几何方法一般有三种类型:

- ① 利用图中已有的平行线进行平移;
- ② 利用特殊点作平行线进行平移;
- ③ 利用异面直线所在几何体的特点, 补形平移.

#### ※ 2、空间余弦定理求异面直线夹角:

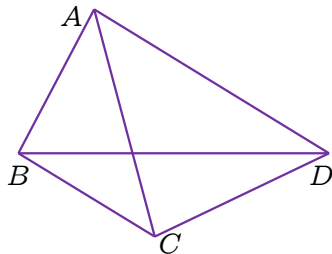
设直线  $AB$ 、 $CD$  的夹角为  $\theta$ , 则有:

$$\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle| = \frac{|(AD^2 + BC^2) - (AC^2 + BD^2)|}{2AB \cdot CD}$$

$$\begin{aligned} \text{推导: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \frac{|AB|^2 + |AD|^2 - |BD|^2}{2|AB| \cdot |AD|} - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|} \\ &= \frac{|AB|^2 + |AD|^2 - |BD|^2}{2} - \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2} \\ &= \frac{(|AD|^2 + |BC|^2) - (|BD|^2 + |AC|^2)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} \\ &= \frac{(AD^2 + BC^2) - (AC^2 + BD^2)}{2AB \cdot CD} \end{aligned}$$

记忆:  $\cos \theta = \frac{|(\text{头尾}^2 + \text{头尾}^2) - (\text{头头}^2 + \text{头头}^2)|}{2AB \cdot CD}$



#### ※ 3、面积射影法求解二面角

(1) 二面角: 范围  $[0^\circ, 180^\circ]$  定义法: 作出二面角的平面角, 转化为解三角形

在平面  $\alpha$  上取一块区域, 面积记为  $S_{\text{原}}$ , 该区域投影至平面  $\beta$ , 投影面积记为  $S_{\text{射}}$ ,

平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  所成二面角记为  $\theta$ , 则:  $\cos \theta = \frac{S_{\text{射}}}{S_{\text{原}}}$





## 小课堂



## 立体几何的空间向量方法

### ★ 1、空间向量的相关概念与运算

(1) **概念**: 在空间, 把具有大小和方向的量叫做空间向量. 用有向线段表示.

(2) **空间向量的运算**:

| 运 算      | 图形语言 | 符号语言                                                                                                                   | 坐标语言                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 加减法      |      | $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$<br>$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$                                                   | 记 $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ , $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$<br>则 $\vec{OA} + \vec{OB} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, z_1 + z_2)$<br>$\vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$<br>设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,<br>则:<br>$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$<br>$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_2 - z_1)$ |
|          |      | $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$<br>$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 实数与向量的乘积 |      | $\vec{b} = \lambda \vec{a} (\lambda \in R)$                                                                            | 记 $\vec{a} = (x, y, z)$<br>则 $\vec{b} = \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z)$                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 向量数量积    |      | $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$                              | 记 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,<br>则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 向量夹角     |      | $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$                                                | 设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ , $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,<br>则: $\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$                                                                                                                                                                                                |
| 向量模长     |      | $ \vec{a} \pm \vec{b}  = \sqrt{(\vec{a} \pm \vec{b})^2} = \sqrt{ \vec{a} ^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} +  \vec{b} ^2}$ | $ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### ★ 2、平面法向量:

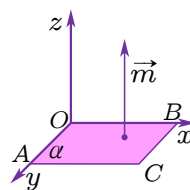
(1) **定义**: 如果表示向量  $\vec{m}$  的有向线段所在直线垂直于平面  $\alpha$ , 则称这个向量垂直于平面  $\alpha$ , 记作  $\vec{m} \perp \alpha$ , 如果  $\vec{m} \perp \alpha$ , 那么向量  $\vec{m}$  叫做平面  $\alpha$  的法向量.

(2) **法向量求法**: 设平面  $ABC$  的法向量  $\vec{m} = (x, y, z)$

$$\text{则: } \begin{cases} \vec{m} \times \vec{AC} = 0 \\ \vec{m} \times \vec{AB} = 0 \end{cases} \implies \vec{m} = (x_0, y_0, z_0)$$

**快速解法**: 把  $\vec{AC} = (a, b, c)$ 、 $\vec{AB} = (d, e, f)$  坐标写两遍, 划掉收尾, 十字相乘求差, 结果为法向量. 若结果有公因式, 可以把公因式约去.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \end{array} \quad \text{法向量 } \vec{n} = (bf - ec, cd - af, ae - bd).$$



### ★ 3、向量方法下的位置关系

#### 小课堂



| 位置关系                                 | 图示 | 向量关系                        | 向量表达                        | 向量坐标运算                                                                                  |
|--------------------------------------|----|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 线线平行<br>( $a \parallel b$ )          |    | $\vec{a} \parallel \vec{b}$ | $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ | $\begin{cases} x_a = \lambda x_b \\ y_a = \lambda y_b \\ z_a = \lambda z_b \end{cases}$ |
| 线线垂直<br>( $a \perp b$ )              |    | $\vec{a} \perp \vec{b}$     | $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ | $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$                                                       |
| 线面平行<br>( $a \parallel \alpha$ )     |    | $\vec{a} \perp \vec{m}$     | $\vec{a} \cdot \vec{m} = 0$ | $x_a x_m + y_a y_m + z_a z_m = 0$                                                       |
| 线面垂直<br>( $a \perp \alpha$ )         |    | $\vec{a} \parallel \vec{m}$ | $\vec{a} = \lambda \vec{m}$ | $\begin{cases} x_a = \lambda x_m \\ y_a = \lambda y_m \\ z_a = \lambda z_m \end{cases}$ |
| 面面平行<br>( $\alpha \parallel \beta$ ) |    | $\vec{n} \parallel \vec{m}$ | $\vec{n} = \lambda \vec{m}$ | $\begin{cases} x_n = \lambda x_m \\ y_n = \lambda y_m \\ z_n = \lambda z_m \end{cases}$ |
| 面面垂直<br>( $\alpha \perp \beta$ )     |    | $\vec{n} \perp \vec{m}$     | $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$ | $x_n x_m + y_n y_m + z_n z_m = 0$                                                       |

### ★ 4、向量方法下的空间角与空间距

| 空间角             | 图 示 | 向量方法                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 线异面<br>直线夹<br>角 |     | <p>设 <math>\theta</math> 为异面直线 <math>a, b</math> 所成角, <math>\vec{a}</math>、<math>\vec{b}</math> 分别表示异面直线 <math>a, b</math> 的方向向量</p> $\cos \theta = \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$                                                                                                                                         |
| 线面角             |     | <p>设 <math>\vec{m}</math> 是平面 <math>\alpha</math> 的法向量, <math>\vec{a}</math> 是 <math>l</math> 的方向向量, <math>l</math> 与平面 <math>\alpha</math> 所成的角为</p> $\sin \theta = \cos \langle \vec{m}, \vec{a} \rangle = \frac{ \vec{a} \cdot \vec{m} }{ \vec{a}  \cdot  \vec{m} }$                                                                                                                      |
| 二面角             |     | <p>设 <math>\vec{n}_1, \vec{n}_2</math> 是面 <math>\alpha, \beta</math> 的法向量, 二面角 <math>\alpha - l - \beta</math> 的大小为 <math>\theta</math>, 二面角大小等于 <math>\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle</math> 或 <math>\pi - \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle</math></p> $\cos \theta = \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{ \vec{n}_1  \cdot  \vec{n}_2 }$ |
| 点面距             |     | <p>若 <math>\vec{n}</math> 是平面 <math>\alpha</math> 的法向量, <math>AB</math> 是平面 <math>\alpha</math> 的一条斜线段, 且 <math>B \in \alpha</math>.</p> $d = \frac{ \vec{AB} \cdot \vec{n} }{ \vec{n} }$                                                                                                                                                                                                    |



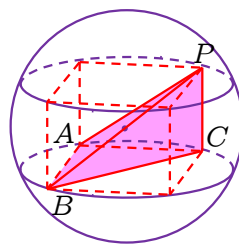
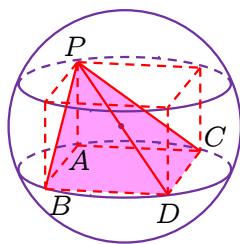
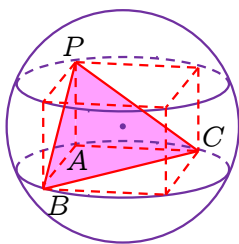


## 小课堂



## 空间球的表面积与体积

★ 1. 【墙角模型】三条线两两互相垂直, 不找球心的位置即可求出球半径



方法: 找三条两两垂直的线段, 利用公式  $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , 即  $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  求出  $R$

★ 2. 【垂面模型】三棱锥中, 一条棱垂直于某个面, 球心离底面距离为这条棱长的一半.

(1) 如图  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 求外接球半径的步骤:

第一步: 将  $\triangle ABC$  画在小圆面上,  $A$  为小圆直径的一个端点,

作小圆直径  $AD$ , 连接  $PD$ , 则  $PD$  必过球心  $O$ ;

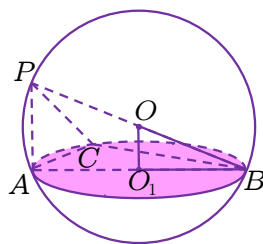
第二步:  $O_1$  为  $\triangle ABC$  的外心, 所以  $OO_1 \perp$  平面  $ABC$ , 算出小圆

半径  $r$  (可利用正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$

计算), 又  $OO_1 = \frac{1}{2}PA$ ;

第三步: 利用勾股定理求三棱锥的外接球半径: ①  $(2R)^2 = PA^2 + (2r)^2$ ;

$$\text{② } R^2 = r^2 + OO_1^2 = r^2 + \left(\frac{PA}{2}\right)^2.$$



(2) 如图,  $P$  的射影是  $\triangle ABC$  的外心  $\iff$  三棱锥  $P-ABC$  的三条侧棱相等  $\iff$  三棱锥  $P-ABC$  的底面  $\triangle ABC$  在圆锥的底上, 顶点  $P$  也是圆锥的顶点.

求解步骤:

第一步: 确定球心  $O$  的位置, 取  $\triangle ABC$  的外心  $O_1$ , 则  $P, O, O_1$  三点共线;

第二步: 先算出小圆  $O_1$  的半径  $AO_1 = r$ , 再算出棱锥的高  $h = PO_1$  (也是圆锥的高);

第三步: 勾股定理:  $OA^2 = r^2 + (h - R)^2$ , 解出  $R$ .

方法二: 小圆直径参与构造大圆, 用正弦定理求大圆直径得球的直径.

※ 3. 【对棱相等模型】

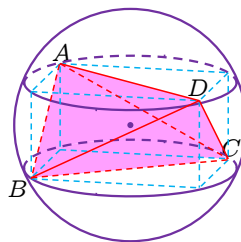
三棱锥  $ABCD$  中,  $AB = CD, AC = BD, AD = BC$ , 可补形为长方体, 再求外接球半径.

第一步: 画出一个长方体, 标出互为异面直线的三组面对角线;

第二步: 设出长方体的长宽高分别为  $a, b, c, AB = CD = y,$

$AC = BD = z, AD = BC = x,$

$$\text{列方程组: } \begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 \\ c^2 + b^2 = y^2 \\ a^2 + c^2 = z^2 \end{cases} \implies a^2 + b^2 + c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2};$$

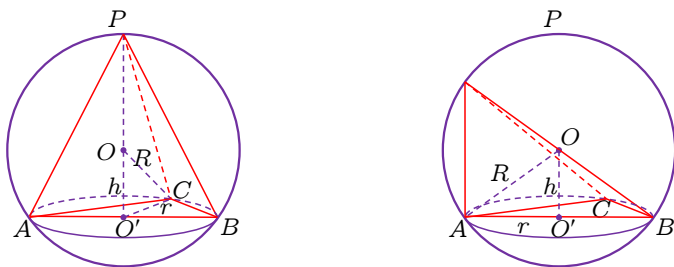


第三步: 根据墙角模型,  $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$ , 即  $R = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{8}}$ .



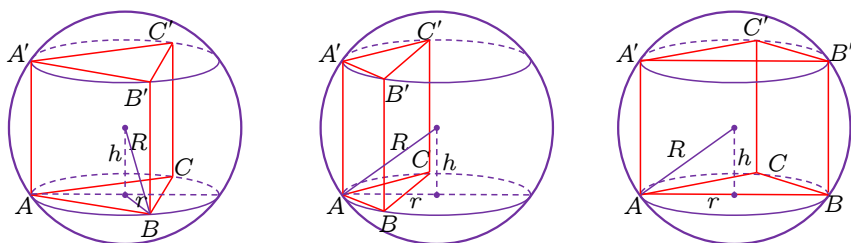


※ 4、【切瓜模型】两个大小圆面互相垂直且交于小圆直径,利用正弦定理求大圆三角形.



如图,平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ , 且  $AB \perp BC$  (即  $AC$  为小圆的直径), 则球心  $O$  在大圆面  $PAC$  上, 利用正弦定理即可求出外接球半径.

※ 5、【汉堡模型】直棱柱的外接球、圆柱的外接球



如图,直三棱柱内接于球 (同时直棱柱也内接与圆柱,棱柱上下底面可以是任意三角形).

**第一步:** 确定球心  $O$  的位置,  $O_1$  是  $\triangle ABC$  的外心, 则  $OO_1 \perp$  面  $ABC$ ;

**第二步:** 算出小圆  $O_1$  半径  $AO_1 = r$ ,  $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = h$  ( $AA_1 = h$  也是圆柱的高);

**第三步:** 勾股定理:  $R^2 = OA^2 = O_1A^2 + OO_1^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$ , 即  $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$ .

※ 6、【折叠模型】两个全等三角形或等腰三角形拼在一起,或菱形折叠

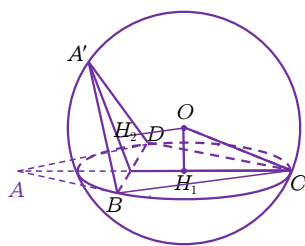
**第一步:** 先画出如图所示的图形, 将  $\triangle ABC$  画在小圆上, 找出

$\triangle BCD$  和  $\triangle A'BD$  的外心  $H_1$  和  $H_2$ ;

**第二步:** 过  $H_1$  和  $H_2$  分别作平面  $BCD$  和平面  $A'BD$  的垂线, 两垂线的交点即为球心  $O$ , 连接  $OE$ ,  $OC$ ;

**第三步:** 解  $\triangle OEH_1$ , 算出  $OH_1$ , 在  $Rt\triangle OCH_1$  中, 勾股定理:

$$OH_1^2 + CH_1^2 = OC^2.$$



小课堂





## 小课堂

# 第四部分 直线与圆



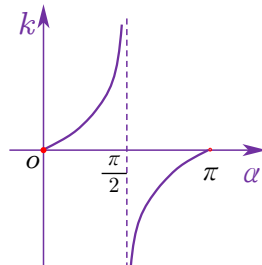
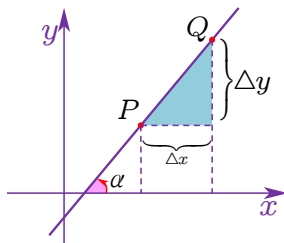
## 直线与直线方程

### ★ 1、倾斜角与斜率

**倾斜角**: 直线向上方向与  $x$  轴正方向所成的最小正角, 范围  $[0, \pi)$

**斜率**: 直线的倾斜角的正切值记为直线的斜率.

$$k = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)).$$



### ★ 2、直线方程

**点斜式**:  $y - y_1 = k(x - x_1)$  (直线  $l$  过点  $P_1(x_1, y_1)$ , 且斜率为  $k$ ).

**斜截式**:  $y = kx + b$  ( $b$  为直线  $l$  在  $y$  轴上的截距).

**两点式**:  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_1 \neq y_2) (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)).$

**截距式**:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a, b$  分别为直线的横、纵截距,  $a, b \neq 0$ )

**一般式**:  $Ax + By + C = 0$  (其中  $A, B$  不同时为 0).

### ※ 3、两直线的平行和垂直

(1) 若  $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$

$$\textcircled{1} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2;$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

(2) 若  $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , 且  $A_1, A_2, B_1, B_2$  都不为零,

$$\textcircled{1} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$$

### ★ 4、直角坐标公式

**两点间距离**:  $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

**点到直线距离**:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  (点  $P(x_0, y_0)$ , 直线  $l: Ax + By + C = 0$ ).

**两平行线间的距离公式**:  $l_1: Ax + By + C_1 = 0, l_2: Ax + By + C_2 = 0$

$$\text{则 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 的距离为 } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**两直线夹角公式**:  $\tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$   $k_1, k_2$  都存在,  $1 + k_1 k_2 \neq 0$

**中点坐标公式**:  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  的中点坐标为:  $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} (\lambda = 1)$





## 直线与圆的位置关系

1、圆的定义：平面上一动点  $P(x, y)$  到一定点  $A(a, b)$  的距离是常数  $r$  的动点轨迹为圆。

### ★ 2、圆方程

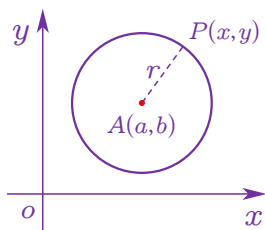
(1) **标准方程**:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .

(2) **一般方程**:  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$ .

圆心  $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$  半径  $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

(3) **直径式方程**:  $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

圆的直径的端点是  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ .



### ※ 3、点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系

(1) **代数法**: 若  $d = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2}$ , 则

$d > r \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆外;

$d = r \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆上;

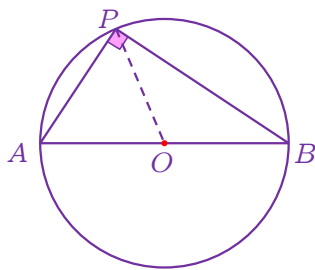
$d < r \Leftrightarrow$  点  $P$  在圆内.

(2) **向量法**: 取圆直径端点为  $A, B$  平面上一点为  $P$ ,

则有:  $\vec{AP} \times \vec{BP} < 0 \Rightarrow P$  在圆内

$\vec{AP} \times \vec{BP} = 0 \Rightarrow P$  在圆上

$\vec{AP} \times \vec{BP} > 0 \Rightarrow P$  在圆外



### ★ 4、直线与圆的位置关系

| 位置关系 | 相 离                                                                                                                                                         | 相 切          | 相 交          |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|
| 图 示  |                                                                                                                                                             |              |              |
| 几何方法 | 通过比较圆心 $O$ 到直线 $l$ 的距离 $d$ 判断位置关系的方法。<br>其中 $d = \frac{ Aa + Bb + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .                                                                  |              |              |
|      | $d > r$                                                                                                                                                     | $d = r$      | $d < r$      |
| 代数方法 | 通过联立圆方程和直线方程得到一元二次方程, 用一元二次方程的判别式判断位置关系的方法。<br>联立: $\begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ 得: $ax^2 + bx + c = 0$ , 判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$ |              |              |
|      | $\Delta < 0$                                                                                                                                                | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |

### 5、圆的切线方程 (已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$ )

(1) 过圆上的  $P_0(x_0, y_0)$  点的切线方程为  $x_0x + y_0y = r^2$ ;

(2) 斜率为  $k$  的圆的切线方程为  $y = kx \pm r\sqrt{1+k^2}$ .

## 小课堂

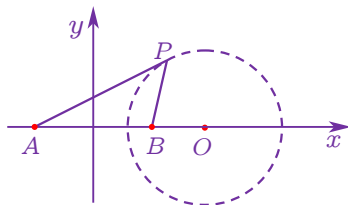




### 小课堂

#### ※ 6、阿氏圆：

给定两定点  $A, B$ , 动点  $P$  满足  $AP = \lambda BP (\lambda > 0, \lambda \neq 1)$  的关系, 则  $P$  点的轨迹为圆, 称为阿氏圆。



证明：

以  $AB$  中点为原点, 建立如图直角坐标系, 记定点  $A(-t, 0), B(t, 0)$ , 设  $P(x, y)$

$$\text{则: } |PA| = \sqrt{(x+t)^2 + y^2}, |PB| = \sqrt{(x-t)^2 + y^2}$$

$$\text{由 } |AP| = \lambda |BP|, \text{ 可得: } |AP|^2 = \lambda^2 |BP|^2, \text{ 即 } (x+t)^2 + y^2 = \lambda^2 [(x-t)^2 + y^2]$$

$$\text{变形可得: } \left(x - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}t\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\lambda t}{\lambda^2 - 1}\right)^2$$

显然,  $\left(\frac{2\lambda t}{\lambda^2 - 1}\right)^2 > 0$ , 上述方程表示以  $\left(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}t, 0\right)$  为圆心,  $\left|\frac{2\lambda t}{\lambda^2 - 1}\right|$  为半径的圆方程。

若  $AB = a, \frac{AP}{PB} = \lambda, AB$  与圆交于  $P_1, P_2$ , 则圆直径  $P_1P_2 = \frac{2a\lambda}{|\lambda^2 - 1|} = \frac{2a}{|\lambda - \frac{1}{\lambda}|}, r = \frac{a}{|\lambda - \frac{1}{\lambda}|}$



### 线性规划与最优解

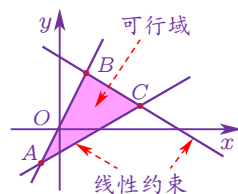
#### 1 相关概念：

**(1) 线性约束条件：**如果两个变量  $x, y$  满足一组一次不等式组, 则称不等式组是变量  $x, y$  的约束条件, 这组约束条件都是关于  $x, y$  的一次不等式, 故又称线性约束条件。

**(2) 线性目标函数：**关于  $x, y$  的一次式  $z = f(x, y)$  是欲达到最大值或最小值所涉及的变量  $x, y$  的解析式, 叫线性目标函数。

**(3) 线性规划问题：**求线性目标函数在线性约束条件下的最值的问题, 统称为线性规划问题。

**(4) 可行解、可行域和最优解：**满足线性约束条件的解  $(x, y)$  叫可行解; 由所有可行解组成的集合叫做可行域; 使目标函数取得最大或最小值的可行解叫线性规划问题的最优解。



#### ※ 2、常见的目标函数的类型：

**“截距”型：** $z = Ax + By + C$

**“斜率”型：** $z = \frac{y-b}{x-a}$

**“距离”型：** $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$  或  $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

在求目标函数的最值时, 可结合线性规划与代数式的几何意义求解, 从而使问题简单化。



## 第五部分 圆锥曲线

小课堂



椭圆及其性质

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 第一定义    | 平面内一动点 $P$ 与两定点 $F_1$ 、 $F_2$ 距离之和为常数(大于 $ F_1F_2 $ ) 的点轨迹                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                     |
| 第二定义    | 平面内一动点到定点与到准线的距离比是常数的点轨迹 $\frac{MF_1}{d_1} = \frac{MF_2}{d_2} = e$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                     |
| 焦 点     | 焦点在 $x$ 轴上                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 焦点在 $y$ 轴上                                          |
| 图 形     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                     |
| 标准方程    | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ |
| 范 围     | $-a \leq x \leq a$ 且 $-b \leq y \leq b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $-b \leq x \leq b$ 且 $-a \leq y \leq a$             |
| 顶 点     | $A_1(-a, 0) A_2(a, 0) B_1(0, -b) B_2(0, b)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $A_1(0, -a) A_2(0, a) B_1(-b, 0) B_2(b, 0)$         |
| 轴 长     | 短轴长 $= 2b$ 长轴长 $= 2a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                     |
| 焦 点     | $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $F_1(0, -c), F_2(0, c)$                             |
| 焦距(焦半径) | $ F_1F_2  = 2c (c^2 = a^2 - b^2)$<br>$ PF_1  = a + ex_0,  PF_2  = a - ex_0$<br>左焦点弦 $ AB  = 2a + e(x_1 + x_2)$ , 右焦点弦 $ AB  = 2a - e(x_1 + x_2)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                     |
| 离心率     | $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (0 < e < 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                     |
| 准线方程    | $x = \pm \frac{a^2}{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $y = \pm \frac{a^2}{c}$                             |
| 切线方程    | $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\frac{x_0x}{b^2} + \frac{y_0y}{a^2} = 1$           |
| 通 径     | 过椭圆焦点且垂直于对称轴的弦长 $ AB  = \frac{2b^2}{a}$ (最短焦点弦)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                     |
| 焦 点 三角形 | (1) 由定义可知: $ PF_1  +  PF_2  = 2a$ , 周长为: $2a + 2c$<br>(2) 焦点三角形面积: $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \times \tan \frac{\theta}{2}$<br>(3) 当 $P$ 在椭圆短轴上时, 张角 $\theta$ 最大, $\cos \theta \geq 1 - 2e^2$<br>(4) 焦长公式: $ PF_1  = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha},  MF_1  = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha}$<br>$ MP  = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \alpha} = \frac{2ab^2}{b^2 + c^2 \sin^2 \alpha}$<br>(5) 离心率: $e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}$ |                                                     |





## 小课堂



## 双曲线及其性质

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                        |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 第一定义         | 平面内一动点 $P$ 与两定点 $F_1, F_2$ 距离之差为常数 (大于 $ F_1F_2 $ ) 的点轨迹                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                        |
| 第二定义         | 平面内一动点到定点与到准线的距离比是常数的点轨迹 $\frac{MF_1}{d_1} = \frac{MF_2}{d_2} = e$                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                        |
| 焦 点          | 焦点在 $x$ 轴上                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 焦点在 $y$ 轴上                                             |
| 图 形          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                        |
| 标准方程         | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ |
| 范 围          | $x \leq -a$ 或 $x \geq a, y \in R$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $y \leq -a$ 或 $y \geq a, x \in R$                      |
| 顶 点          | $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $A_1(0, -a), A_2(0, a)$                                |
| 轴 长          | 虚轴长 = $2b$ 实轴长 = $2a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                        |
| 焦 点          | $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $F_1(0, -c), F_2(0, c)$                                |
| 焦距(焦半径)      | $ F_1F_2  = 2c (c^2 = a^2 + b^2)$ $ PF_1  = a + ex_0,  PF_2  = -a + ex_0$ 左支添“-”                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                        |
| 离心率          | $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} (e > 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                        |
| 准线方程         | $x = \pm \frac{a^2}{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $y = \pm \frac{a^2}{c}$                                |
| 渐近线          | $y = \pm \frac{b}{a}x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $y = \pm \frac{a}{b}x$                                 |
| 切线方程         | $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\frac{x_0x}{b^2} - \frac{y_0y}{a^2} = 1$              |
| 通 径          | 过双曲线焦点且垂直于对称轴的弦长 $ AB  = \frac{2b^2}{a}$ (最短焦点弦)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                        |
| 焦 点<br>三 角 形 | <p>(1) 由定义可知: <math> PF_1  -  PF_2  = 2a</math></p> <p>(2) 焦点直角三角形的个数为八个, 顶角为直角与底角为直角各四个;</p> <p>(3) 焦点三角形面积: <math>S_{\Delta F_1PF_2} = b^2 \div \tan \frac{\theta}{2} = c \cdot  y </math></p> <p>(4) 离心率: <math>e = \frac{ F_1F_2 }{  PF_1  -  PF_2  } = \frac{\sin \theta}{ \sin \alpha - \sin \beta } = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{ \sin \alpha - \sin \beta }</math></p> |                                                        |





|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |                      |                      |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 定 义   | 平面内与一个定点 $F$ 和一条定直线 $l$ 的距离相等的点的轨迹称为抛物线.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                      |                      |                      |
| 方 程   | $y^2 = 2px$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $y^2 = -2px$         | $x^2 = 2py$          | $x^2 = -2py$         |
| 图 形   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |                      |                      |
| 顶 点   | $(0, 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                      |                      |                      |
| 对 称 轴 | $x$ 轴                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                      | $y$ 轴                |                      |
| 焦 点   | $F(\frac{p}{2}, 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $F(-\frac{p}{2}, 0)$ | $F(0, \frac{p}{2})$  | $F(0, -\frac{p}{2})$ |
| 准线方程  | $x = -\frac{p}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $x = \frac{p}{2}$    | $y = -\frac{p}{2}$   | $y = \frac{p}{2}$    |
| 离心率   | $e = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                      |                      |                      |
| 范 围   | $x \geq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $x \leq 0$           | $y \geq 0$           | $y \leq 0$           |
| 切线方程  | $y_0 y = p(x + x_0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                      | $x_0 x = p(y + y_0)$ |                      |
| 通 径   | 过抛物线焦点且垂直于对称轴的弦 $ AB  = 2P$ (最短焦点弦)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                      |                      |                      |
| 焦点弦   | $AB$ 为过 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点的弦, $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ , 倾斜角为 $\alpha$ . 则: <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(1) <math> AF  = x_1 + \frac{p}{2}</math></div> <div><math> BF  = x_2 + \frac{p}{2}</math></div> <div><math> AB  = x_1 + x_2 + p</math>,</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(2) <math>x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}</math></div> <div><math>y_1 y_2 = -p^2</math>;</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(3) <math> AF  = \frac{p}{1 - \cos \alpha}</math></div> <div><math> BF  = \frac{p}{1 + \cos \alpha}</math></div> <div><math>\frac{1}{ FA } + \frac{1}{ FB } = \frac{2}{P}</math></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(4) <math> AB  = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}</math></div> <div><math>S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \alpha}</math></div> </div> |                      |                      |                      |
|       | $AB$ 为过 $x^2 = 2py (p > 0)$ 焦点的弦, $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ , 倾斜角为 $\alpha$ . 则: <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(1) <math> AF  = \frac{p}{1 - \sin \alpha}</math></div> <div><math> BF  = \frac{p}{1 + \sin \alpha}</math></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div>(2) <math> AB  = \frac{2p}{\cos^2 \alpha}</math></div> <div><math>S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \cos \alpha}</math></div> </div> <div style="margin-top: 10px;">                     (3) <math>\frac{ AF }{ BF } = \lambda</math>, 则: <math>\sin \alpha = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}</math> </div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                      |                      |                      |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |                      |                      |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |                      |                      |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |                      |                      |





## 小课堂



## 点差法与通法

### 1、圆锥曲线综述：

联立方程设交点，韦达定理求弦长；变量范围判别式，曲线定义不能忘；  
弦斜中点点差法，设而不求计算畅；向量参数恰当用，数形结合记心间。

### ★ 2、直线与圆锥曲线的位置关系

#### (1)直线的设法：

- ① 若题目明确涉及斜率，则设直线： $y = kx + b$ ，需考虑直线斜率是否存在，分类讨论；  
② 若题目没有涉及斜率或直线过  $(a, 0)$  则设直线： $x = my + a$ ，可避免对斜率进行讨论

(2)研究通法：联立  $\begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$  得： $ax^2 + bx + c = 0$

判别式： $\Delta = b^2 - 4ac$ ，韦达定理： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

(3)弦长公式： $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$   
 $= \sqrt{(1 + k^2) \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]}$

### 3、硬解定理

设直线  $y = kx + \varphi$  与曲线  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$  相交于  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$

由： $\begin{cases} y = kx + \varphi \\ nx^2 + my^2 = mn \end{cases}$ ，可得： $(n + mk^2)x^2 + 2k\varphi mx + m(\varphi^2 - n) = 0$

判别式： $\Delta = 4mn(n + mk^2 - \varphi^2)$  韦达定理： $x_1 + x_2 = \frac{-2km\varphi}{n + mk^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{m(\varphi^2 - n)}{n + mk^2}$

由： $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ ，代入韦达定理： $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{n + mk^2}$

### ★ 4、点差法：

若直线  $l$  与曲线相交于  $M$ 、 $N$  两点，点  $P(x_0, y_0)$  是弦  $MN$  中点， $MN$  的斜率为  $k_{MN}$ ，

则：在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  中，有  $k_{MN} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2}$ ；

在双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  中，有  $k_{MN} \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2}$ ；

在抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  中，有  $k_{MN} \cdot y_0 = p$ 。

#### 证明：(椭圆)

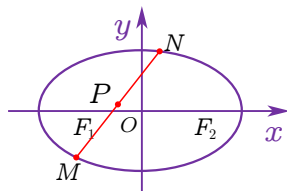
设  $M$ 、 $N$  两点的坐标分别为  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \dots\dots (1) \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2), \text{得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0.$$

$$\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

$$\text{又 } \because k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}. \therefore k_{MN} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}.$$







## 1、参数方程的概念

在平面直角坐标系中, 曲线上任意一点的坐标  $x, y$  都是某个变数  $t$  的函数  $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$

并且对于  $t$  的每一个允许值, 由这个方程所确定的点  $M(x, y)$  都在这条曲线上, 该方程就叫做这条曲线的参数方程, 联系变数  $x, y$  的变数  $t$  叫做参数, 简称参数.

相对于参数方程而言, 直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程.

## ※ 2、直线的参数方程

(1) 过定点  $P(x_0, y_0)$ 、倾斜角为  $\alpha (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$  的直线的参数方程  $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$

(2) 参数  $t$  的几何意义:

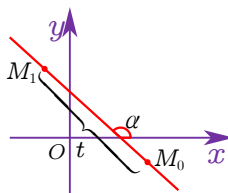
参数  $t$  表示直线  $l$  上以定点  $M_0$  为起点, 任意一点  $M(x, y)$  为终点的有向线段的长度再加上表示方向的正负号, 也即  $|\overrightarrow{M_0 M}| = |t|$ ,

$|t|$  表示直线上任一点  $M$  到定点  $M_0$  的距离.

当点  $M$  在  $M_0$  上方时,  $t > 0$ ;

当点  $M$  在  $M_0$  下方时,  $t < 0$ ;

当点  $M$  与  $M_0$  重合时,  $t = 0$ ;



(3) 直线方程与参数方程互化:  $y - y_0 = \tan \alpha (x - x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$

(4) 直线参数方程:  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \text{ 为参数}),$

当  $a^2 + b^2 = 1$  时, 参数方程为标准型参数方程, 参数的几何意义才是代表距离.

当  $a^2 + b^2 \neq 1$  时, 将参数方程化为  $\begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} t \\ y = y_0 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} t \end{cases}$  然后再进行计算.

## ★ 3、圆的参数方程

(1) 圆心  $(a, b)$ , 半径  $r$  的圆  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  参数方程  $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数});$

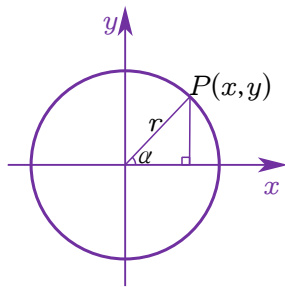
特别: 当圆心在原点时, 半径为  $r$  的圆  $x^2 + y^2 = r^2$  的参数方程为:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 是参数}).$

(2) 参数  $\theta$  的几何意义:  $\theta$  表示  $x$  轴的正方向到圆心

和圆上任意一点的半径所成的角.

(3) 消参的方法: 利用  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,

可得圆方程:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



## ★ 4、椭圆的参数方程

(1) 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的参数方程为  $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数});$

椭圆  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的参数方程为  $\begin{cases} x = b \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数});$

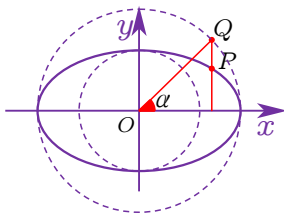




## 小课堂

(2) **参数  $\theta$  的几何意义**: 参数  $\theta$  表示椭圆上某一点的离心角.

如图所示, 点  $P$  对应的离心角为  $\theta = \angle QOx$  (过  $P$  作  $PQ \perp x$  轴, 交大圆即以  $2a$  为直径的圆于  $Q$ ), 切不可认为是  $\theta = \angle POx$ .



## 5、双曲线的参数方程

$$(1) \text{ 双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x = a \sec \varphi \\ y = b \tan \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数}); \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{双曲线 } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x = b \cot \varphi \\ y = a \csc \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数}); \csc \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$$

(2) **参数  $\theta$  的几何意义**: 参数  $\theta$  表示双曲线上某一点的离心角.

## ※ 6、抛物线的参数方程

$$(1) \text{ 抛物线 } y^2 = 2px \text{ 参数方程 } \begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} (t \text{ 为参数}, t = \frac{1}{\tan \alpha});$$

(2) **参数  $t$  的几何意义**: 抛物线上除顶点外的任意一点与原点连线的斜率的倒数.  $t = \frac{1}{k_{OP}}$



## 仿射变换与齐次式

### 1、仿射变换:

在几何中, 一个向量空间进行一次线性变换并接上一个平移, 变换为另一个向量空间.

### ※ 2、椭圆的变换:

| 椭圆   | $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$                                                                                                                            |                                                                                                                                                          |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 变换内容 | $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{a}{b} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{b}{a} y' \end{cases}$                              | $\begin{cases} x' = \frac{b}{a} x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b} x' \\ y = y' \end{cases}$                              |
| 圆方程  | $x^2 + y^2 = a^2$                                                                                                                                        | $x^2 + y^2 = b^2$                                                                                                                                        |
| 图 示  |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                          |
| 点坐标  | $A(x_0, y_0) \rightarrow A'(x_0, \frac{a}{b} y_0)$                                                                                                       | $A(x_0, y_0) \rightarrow A'(\frac{b}{a} x_0, y_0)$                                                                                                       |
| 斜率变化 | $k' = \frac{a}{b} k$ , 由于 $k_{A'C'} \cdot k_{B'C'} = -1$ .<br>$k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{b}{a} k_{A'C'} \cdot \frac{b}{a} k_{B'C'} = -\frac{b^2}{a^2}$ | $k' = \frac{a}{b} k$ , 由于 $k_{A'C'} \cdot k_{B'C'} = -1$ .<br>$k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{b}{a} k_{A'C'} \cdot \frac{b}{a} k_{B'C'} = -\frac{b^2}{a^2}$ |
| 弦长变化 | 则 $AB = \sqrt{1+k^2}  x_1 - x_2 $<br>$\Rightarrow A'B' = \sqrt{1+k'^2}  x_1 - x_2 $<br>$= \sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2 k^2}  x_1 - x_2 $                    |                                                                                                                                                          |
| 面积变化 | $S_{\triangle ABC} = \frac{b}{a} S_{\triangle A'B'C'}$ (水平宽不变, 铅锤高缩小)                                                                                    | $S_{\triangle ABC} = \frac{a}{b} S_{\triangle A'B'C'}$ (水平宽扩大, 铅锤高不变)                                                                                    |



3、中点弦问题,  $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ , 中垂线问题  $\frac{k_{OP}}{k_{MP}} = \frac{b^2}{a^2}$ , 且  $x_M = \frac{c^2 x_0}{a^2}$   $y_N = -\frac{c^2 y_0}{b^2}$ ,

**拓展1:**椭圆内接  $\triangle ABC$  中, 若原点  $O$  为重心, 则仿射后一定得到  $\triangle OB'C'$  为  $120^\circ$  的等腰三角形;  $\triangle A'B'C'$  为等边三角形;

**拓展2:**椭圆内接平行四边形  $OAPB$  ( $A, P, B$ ) 在椭圆上, 则仿射后一定得菱形  $OA'P'B'$

#### 4、面积问题:

(1) 若以椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  对称中心引出两条直线交椭圆于  $A, B$  两点, 且  $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$ ,

则经过仿射变换后  $k_{OA'} \cdot k_{OB'} = -1$ , 所以  $S_{\triangle AOB}$  为定值.

(2) 若椭圆方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上三点  $A, B, M$ , 满足: ①  $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$

②  $S_{\triangle AOB} = \frac{ab}{2}$  ③  $\overrightarrow{OM} = \sin \alpha \overrightarrow{OA} + \cos \alpha \overrightarrow{OB} (\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$ , 三者等价

#### ※ 5、平移构造齐次式: (圆锥曲线斜率之和与积的问题)

**(1) 题设:** 过圆锥曲线上的一个定点  $P$  作两条直线与圆锥曲线交于  $A, B$ , 在直线  $PA$  和  $PB$  斜率之和或者斜率之积为定值的情况下, 直线  $AB$  过定点或者  $AB$  定斜率的问题.

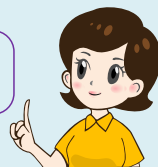
**(2) 步骤:** ① 将公共点  $P$  平移到坐标原点 (点平移: 左加右减上减下加) 找出平移单位长.

② 由①中的平移单位长得平移后的圆锥曲线  $C'$ , 所有直线方程统一写为:  $mx + ny = 1$

③ 将圆锥曲线  $C'$  展开, 在一次项中乘以  $mx + ny = 1$ , 构造出齐次式.

④ 在齐次式中, 同时除以  $x^2$ , 构建斜率  $k$  的一元二次方程, 由韦达定理可得斜率之积 (和).

#### 小课堂



### 圆锥曲线考点归类

#### (一) 条件方法梳理

##### 1、椭圆的角平分线定理

(1) 若点  $A, B$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的点,  $AB$  与椭圆长轴交点为  $N$ , 在长轴上一定存在一个点  $M$ , 当且仅当  $x_M \cdot x_N = a^2$  时,  $\angle AMN = \angle BMN$ , 即长轴为角平分线;

(2) 若点  $A, B$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上的点,  $AB$  与椭圆短轴交点为  $N$ , 在短轴上一定存在一个点  $M$ , 当且仅当  $y_M \cdot y_N = b^2$  时,  $\angle AMN = \angle BMN$ , 即短轴为角平分线;

#### ※ 2、关于角平分线的结论:

若直线  $AO$  的斜率为  $k_1$ , 直线  $CO$  的斜率为  $k_2$ ,  $EO$  平分  $\angle AOC$

则有:  $k_1 + k_2 = \tan \alpha + \tan(\pi - \alpha) = 0$

角平分线的一些等价代换条件: 作  $x$  轴的对称点、点到两边的距离相等.





### 小课堂

### 3、四种常用直线系方程

(1) **定点直线系方程**: 经过定点  $P_0(x_0, y_0)$  的直线系方程为  $y - y_0 = k(x - x_0)$  (除直线  $x = x_0$ ), 其中  $k$  是待定的系数; 经过定点  $P_0(x_0, y_0)$  的直线系方程为  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ , 其中  $A, B$  是待定的系数.

(2) **共点直线系方程**: 经过两直线  $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  的交点的直线系方程为  $(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (除  $l_2$ ), 其中  $\lambda$  是待定的系数.

(3) **平行直线系方程**: 直线  $y = kx + b$  中当斜率  $k$  一定而  $b$  变动时, 表示平行直线系方程. 与直线  $Ax + By + C = 0$  平行的直线系方程是  $Ax + By + \lambda = 0 (\lambda \neq 0)$ ,  $\lambda$  是参变量.

(4) **垂直直线系方程**: 与直线  $Ax + By + C = 0$  ( $A \neq 0, B \neq 0$ ) 垂直的直线系方程是  $Bx - Ay + \lambda = 0, \lambda$  是参变量.

### 4、圆系方程

(1) 过直线  $l: Ax + By + C = 0$  与圆  $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  的交点的圆系方程是  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0, \lambda$  是待定的系数.

(2) 过圆  $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$  的交点的圆系方程是  $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0, \lambda$  是待定的系数.

### ★(二) 圆锥曲线过定点问题

#### 1、直线过定点的背景:

(1) 直线过定点模型:  $A, B$  是圆锥曲线上的两动点,  $M$  是一定点, 其中  $\alpha, \beta$  分别为  $MA, MB$  的倾斜角, 则:

①、 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  为定值  $\Leftrightarrow$  直线  $AB$  恒过定点;

②、 $k_{MA} \cdot k_{MB}$  为定值  $\Leftrightarrow$  直线  $AB$  恒过定点;

③、 $\alpha + \beta = \theta (0 < \theta < \pi) \Leftrightarrow$  直线  $AB$  恒过定点.

(2) 抛物线中直线过定点:  $A, B$  是抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上的两动点,  $\alpha, \beta$  分别为  $OA, OB$  的倾斜角, 则:

$OA \perp OB \Leftrightarrow k_{OA} \cdot k_{OB} = -1 \Leftrightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$  直线  $AB$  恒过定点  $(2p, 0)$ .

(3) 椭圆中直线过定点模型:  $A, B$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上异于右顶点  $D$  的两动点, 其中  $\alpha, \beta$  分别为  $DA, DB$  的倾斜角, 则可以得到下面几个充要结论:

$DA \perp DB \Leftrightarrow k_{DA} \cdot k_{DB} = -1 \Leftrightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$  直线  $AB$  恒过定点  $(\frac{ac^2}{a^2 + b^2}, 0)$ .



## 2、定点的求解方法:

① 含参形式简单的直线方程,通过将直线化为  $y - y_0 = k(x - x_0)$  可求得定点坐标  $(x_0, y_0)$

② 含参形式复杂的通过**变换主元法**求解定点坐标.

**变换主元法:**将直线化为  $h(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$ , 解方程组:  $\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$  可得定点坐标.

eg: 直线方程:  $(2m+1)x + (m-5)y + 6 = 0$ , 将  $m$  看作主元, 按照降幂排列:  $(2x+y)m$

$+x-5y+6=0$ , 解方程组:  $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-5y+6=0 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} x=-\frac{6}{11} \\ y=\frac{12}{11} \end{cases}$ , 求得直线过定点  $(-\frac{6}{11}, \frac{12}{11})$ .

## 3、关于以 $AB$ 为直径的圆过定点问题:

(1) **直接法:** 设出参数后, 表示出圆的方程.

**圆的直径式方程:**  $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

(2) **由特殊到一般:** 利用赋值法, 先求出几个位置的圆方程, 联立圆方程解出公共交点,

该交点即为圆所过的定点, 再利用向量数量积为 0 证明点恒在圆上.

## ★ (三) 圆锥曲线面积问题

### 1、面积的求解方法:

(1)  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d$ , 从公式可以看出, 求面积重在求解弦长和点到线的距离.

(2)  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \text{水平宽} \times \text{铅锤高}$ , 主要以点的坐标运算为主.

### 2、面积中最值的求解

(1)  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \varphi}{x+n}$  型: 令  $t = x+n \Rightarrow x = t-n$  进行代换后裂项转化为:  $y = at + \frac{b}{t}$

(2)  $f(x) = \frac{x+n}{\alpha x^2 + \beta x + \varphi}$  型: 先在分母中配出分子式  $f(x) = \frac{x+n}{\alpha(x+n)^2 + \lambda(x+n) + \nu}$

令  $t = x+n$ , 此时:  $y = \frac{t}{\alpha t^2 + \lambda t + \nu}$ , 分子分母同时除  $t$ , 此时  $y = \frac{1}{\alpha t + \frac{\nu}{t} + \lambda}$ , 再利

用对勾函数或不等式分析最值.

(3)  $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x+n}}$  型: 令  $t = \sqrt{x+n} \Rightarrow x = t^2 - n$  进行代换后裂项, 可转化为:  $y = at + \frac{b}{t}$

小课堂





## 小课堂



# 数理统计与概率

## 第一部分 统计学



### 单一数据的统计分析

#### 1、抽样方法

**(1)简单随机抽样:**一个总体含有  $N$  个个体,如果通过逐个抽取的方法从中抽取一个样本,且每次抽取时各个个体被抽到的概率相等,这样的抽样方法叫做简单随机抽样.

**(2)系统抽样法(等距抽样法、机械抽样法):**依据一定的抽样距离,从总体中抽取样本.从容量为  $N$  的总体中抽取容量为  $n$  的样本,可将总体分成均衡的若干部分,然后按照预先规定的规则,从每一部分抽取一个个体,得到所需要的样本的抽样方法. **步骤如下:**

- ①编号:先将总体的  $N$  个个体编号,有时可直接利用自身个体所带的号码,如学号等.
- ②分段:确定分段间隔  $k$ ,对编号进行分段,当  $N/n$  ( $n$  是样本容量)是整数时,取  $k = N/n$ .
- ③确定第一个个体编号:在第一段用简单随机抽样确定第一个个体编号  $l$  ( $l \leq k$ ).
- ④成样:按照一定的规则抽取样本,通常是将  $l$  加上间隔  $k$  得到第二个个体编号 ( $l + k$ ),再加上  $k$  得到第三个个体编号 ( $l + 2k$ ),依次进行下去,直到获取整个样本.

**(3)分层抽样:**分层抽样法也叫类型抽样法.是从一个可以分成不同子总体(或称为层)的总体中,按规定的比例从不同层中随机抽取样品(个体)的方法.

#### ★ 2、用样本估计总体

**众数:** 出现次数最多的数据

**中位数:**按从小到大,处在中间的一个数据(或中间两个数的平均数)

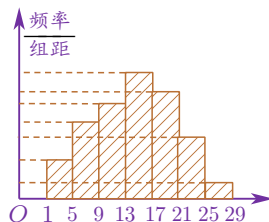
**平均数:**  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$  平均数反映数据总体水平

**方差**  $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  **样本标准差:**  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

**极差** = 最大数 - 最小数

#### ★ 3、频率分布直方图

**(1)概念:**在直角坐标系中,横轴表示样本数据,纵轴表示频率与组距的比值,将频率分布表中的各组频率的大小用相应矩形面积的大小来表示,由此画成的统计图叫做频率分布直方图.



##### (2) 频率分布直方图的特征

- ①图中各个长方形的面积等于相应各组的频率的数值,所有小矩形面积和为1.
- ②从频率分布直方图可以清楚地看出数据分布的总体趋势.
- ③从频率分布直方图得不出原始的数据内容,把数据表示成直方图后,原有的具体数据信息被抹掉.

频率分布直方图中,各小长方形面积之和为1





### (3) 频率分布直方图求数据

- ① 众数: 频率分布直方图中最高矩形的底边中点的横坐标.
- ② 平均数: 频率分布直方图各个小矩形的面积乘底边中点的横坐标之和.
- ③ 中位数: 把频率分布直方图分成两个面积相等部分的平行于  $y$  轴的直线横坐标.

#### ★ 4. 茎叶图:

将数组中的数按位数进行比较, 将数的大小基本不变或变化不大的位作为一个主干(茎), 将变化大的位的数作为分枝(叶)列在主干的后面, 这样可以清楚地看到每个主干后面的几个数.

| 叶       | 茎  | 叶     |
|---------|----|-------|
| 4       | 8  | 5 6 9 |
| 7 6     | 9  | 2 6 9 |
| 5 5 4 2 | 10 | 7 7   |
| 2       | 11 | 2 9   |

#### 小课堂



### 成对数据的统计分析

#### (一) 线性回归分析

##### ★ 1. 回归直线方程

- ① 变量之间的两类关系: 函数关系与相关关系;
- ② 制作散点图, 判断线性相关关系;

③ 线性回归方程:  $\hat{y} = a + bx$  (最小二乘法), 其中

$$\begin{cases} b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ a = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

**注意:** 线性回归直线经过定点  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

##### ※ 2. 相关系数: (判定两个变量线性相关性)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

**注:** (1)  $r > 0$  时, 变量  $x, y$  正相关;  $r < 0$  时, 变量  $x, y$  负相关;  $r \in [-1, 1]$

- (2) ①  $|r|$  越接近于 1, 两个变量的线性相关性越强;
- ②  $|r|$  接近于 0 时, 两个变量之间几乎不存在线性相关关系.

##### ※ 3. 回归分析中回归效果的判定:

(1) 残差:  $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ ;

(2) 总偏差平方和:  $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  残差平方和:  $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ ;

(3) 回归平方和:  $SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ ; 即  $SST = SSR + SSE$





### 小课堂

$$(4) \text{ 相关指数 } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}.$$

注：①  $R^2$  得知越大，说明残差平方和越小，则模型拟合效果越好；

②  $R^2$  越接近于 1，则回归效果越好。

### ★ (二) 独立性检验

假设有两个分类变量  $X$  和  $Y$ ，它们的值域分别为  $(x_1, x_2)$  和  $(y_1, y_2)$ ，其样本频数  $2 \times 2$  列联表为：

|       | $y_1$   | $y_2$   | 总计              |
|-------|---------|---------|-----------------|
| $x_1$ | $a$     | $b$     | $a + b$         |
| $x_2$ | $c$     | $d$     | $c + d$         |
| 总计    | $a + c$ | $b + d$ | $a + b + c + d$ |

若要推断的论述  $H$ ：“ $X$  和  $Y$  有关系”，可以利用独立性检验来考察两个变量是否有关系，并且能较精确地给出这种判断的可靠程度。

**具体的做法：**由表中的数据算出随机变量  $K^2$  的值。  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，

其中  $n = a + b + c + d$  为样本容量， $K^2$  值越大，说明“ $X$  和  $Y$  有关系”成立可能性越大

**临界值表：**

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.25  | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $k_0$             | 1.323 | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

随机变量  $K^2$  越大，说明两个分类变量，关系越强；反之，越弱。

**步骤归纳：**

第一步：提出假设检验问题  $H_0$ ：吸烟与患肺癌没有关系  $\leftrightarrow H_1$ ：吸烟与患肺癌有关系

第二步：选择检验的指标  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ （它越小，原假设“ $H_0$ ：吸烟与患肺癌没有关系”成立的可能性越大；它越大，备择假设“ $H_1$ ：吸烟与患肺癌有关系”成立的可能性越大。





## 第二部分 计数原理



### 排列与组合

#### 小课堂



#### 1、分类计数原理 (加法原理)

完成一件事,有  $n$  类办法,在第 1 类办法中有  $m_1$  种不同的方法,在第 2 类办法中有  $m_2$  种不同的方法……,在第  $n$  类办法中有  $m_n$  种不同的方法,那么完成这件事共有:

$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$  种不同的方法.

注意事项:

- (1) 每种方式都能实现目标,不依赖于其他条件;
- (2) 每种情况内任两种方式都不同时存在;
- (3) 不同情况之间没有相同方式存在.

#### 2、分步计数原理 (乘法原理)

完成一件事,需要  $n$  个步骤,在第 1 个步骤中有  $m_1$  种不同的方法,在第 2 个步骤中有  $m_2$  种不同的方法……,在第  $n$  个步骤中有  $m_n$  种不同的方法,那么完成这件事共有:

$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$  种不同的方法.

注意事项:

- (1) 步骤可以分出先后顺序,每一步骤对实现目标是必不可少的;
- (2) 每步的方式具有独立性,不受其他步骤影响;
- (3) 每步所取的方式不同,不会得出(整体的)相同方式.

#### ★ 3、排列数

一般地,从  $n$  个不同元素中取出  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) 个不同的元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从  $n$  个元素中取出  $m$  个元素的一个排列 (permutation). 特别地,当  $m = n$  时这个排列被称作全排列 (all permutation).

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ (规定 } 0! = 1)$$

#### ★ 4、组合数

一般地,从  $n$  个不同的元素中,任取  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) 个元素为一组,叫作从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \text{ (} n \in N^*, m \in N, \text{ 且 } m \leq n).$$

#### ※ 5、组合数的性质

$$(1) C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$$

$$(2) C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^m = 2^n. \text{ 注: 规定 } C_n^0 = 1.$$





## 小课堂



## 二项式定理

### ★ 1、二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \boxed{C_n^r} a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^m b^n$$

二项展开式      二项式系数

### ★ 2、二项式定理的说明

- (1) 项数:  $n+1$  项
- (2) 第  $r+1$  项的二项式系数是  $C_n^r$
- (3) 在二项展开式中, 与首末两端等距离的两项的二项式系数相等.
- (4) 如果二项式的幂指数是偶数, 中间的一项的二项式系数最大. 如果二项式的幂指数是奇数, 中间两项的二项式系数最大, 并且相等.
- (5) 通项公式:  $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r (r=0, 1, 2, \dots, n)$ , 是第  $r+1$  项

### ※ 3、二项式定理性质:

- (1) 所有二项式系数和  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^m = 2^n$ , 并且中间项二项式系数最大
- (2)  $C_n^r + C_n^{r+1} + C_n^{r+2} + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$ .
- (3)  $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^m = n2^{n-1}$ .
- (4)  $C_m^r C_n^0 + C_m^{r-1} C_n^1 + \cdots + C_m^0 C_n^r = C_{m+n}^r$

### 4、数学归纳法证明二项式定理

二项式定理的证明  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^m b^n (n \in N^*)$

**证明:** (1) 当  $n=1$  时,  $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$  成立;

(2) 假设  $n=k$  时等式成立, 即

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k$$

当  $n=k+1$  时

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) \\ &= (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k) (a+b) \\ &= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \cdots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} \\ &= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^{k-2}) a^2 b^{k-1} + (C_k^k + C_k^{k-1}) a b^k + C_k^k b^{k+1} \\ &= C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$  时等式成立, 综合 (1) (2) 等式成立



## 第三部分 概型及概率

小课堂



### 古典概型与几何概型

#### ★ 1、古典概型(等可能概型):

(1) **定义:** 试验中所有可能出现的事件数有限并且每个事件发生的可能性相等的概型.

(2) **求基本事件个数方法:** 列举法、图表法

(3) **概率计算方法:**  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$

#### ★ 2、几何概型:

(1) **定义:** 试验中所有可能出现的事件数无限并且每个事件发生的可能性相等的概型.

(2) **求基本事件个数方法:** 计算图形面积, 线段长度

(3) **概率计算方法:**  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 的区域长度(面积或体积)}}{\text{区域总长度(面积或体积)}}$



### 事件与概率计算

#### 1、互斥事件

(1) **定义:** 事件  $A$  和  $B$  的交集为空,  $A$  与  $B$  就是互斥事件, 也叫互不相容事件. 也可叙述为: 不可能同时发生的事件. 如  $A \cap B$  为不可能事件( $A \cap B = \Phi$ ), 那么称事件  $A$  与事件  $B$  互斥, 其含义是: 事件  $A$  与事件  $B$  在任何一次试验中不会同时发生.

(2) **概率计算:**  $A$ 、 $B$  为互斥事件, 则:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

(3)  **$n$  个互斥事件发生的概率的和**  $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$

#### ★ 2、对立事件

(1) **定义:** 若  $A$  交  $B$  为不可能事件,  $A$  并  $B$  为必然事件, 那么称  $A$  事件与事件  $B$  互为对立事件, 其含义是: 事件  $A$  和事件  $B$  必有一个且仅有一个发生.  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ .

(2) **概率计算:** 事件  $A$  的对立事件记作  $\bar{A}$ :  $P(A) + P(\bar{A}) = 1, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3) 对立事件一定是互斥事件, 互斥事件未必是对立事件.

#### ★ 3、独立事件

(1) **定义:** 事件  $A$  是否发生对事件  $B$  发生的概率没有影响. 则  $A$ 、 $B$  为相互独立事件.

对立事件属于一种特殊的互斥事件.





(2)  $A$ 、 $B$  事件同时发生的概率： $P(AB) = P(A) \times P(B)$

### 小课堂

$A$  或  $B$  事件发生的概率： $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$

(3)  $n$  个独立事件同时发生的概率： $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n)$

#### ※ 4、条件概率：

(1) **定义**：对任意事件  $A$ 、 $B$ ，在已知事件  $A$  发生条件下事件  $B$  发生的概率，叫条件概率。

(2) **概率计算**： $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$ .

#### 5、频率、频数与概率

(1) **频率、频数**：在相同条件  $S$  下重复  $n$  次试验，观察某一事件  $A$  是否出现，称  $n$  次试验中事件  $A$  出现的次数  $n_A$  为事件  $A$  出现的频数，称事件  $A$  出现的比例  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$  为事件  $A$  出现的频率。

(2) **概率**事件  $A$  的概率：在大量重复进行同一试验时，事件  $A$  发生的频率  $\frac{m}{n}$  总接近于某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件  $A$  的概率，记作  $P(A)$ 。

#### 6、随机数

(1) **定义**：在一定范围内随机产生的数，并且得到这个范围内任何一个数的机会是均等的。

(2) **产生方法**：用试验方法，如把数字标在小球上搅拌均匀，用统计中的抽签法等抽样方法，可产生某个范围内的随机数。在计算机中可用随机函数产生某个范围的伪随机数，当作随机数来应用。

(3) **随机模拟法 (蒙特卡罗法)**：用计算机或计算器模拟试验的方法，具体步骤如下：

① 用计算器或计算机产生某个范围内的随机数，并赋予每个随机数一定的意义；

② 统计代表某意义的随机数的个数  $M$  和总的随机数个数  $N$ ；

③ 计算频率  $f_n(A) = \frac{M}{N}$  作为所求概率的近似值



## 第四部分 离散型随机变量



### 离散型随机变量

#### 小课堂



#### 1、离散型随机变量

(1) **随机变量**: 如果随机试验的结果可以用一个变量来表示, 那么这样的变量叫做随机变量, 随机变量常用字母  $X, Y, \xi, \eta$  等表示.

(2) **离散型随机变量**: 对于随机变量可能取的值, 可以按一定次序一一列出, 这样的随机变量叫做离散型随机变量.

(3) **连续型随机变量**: 对于随机变量可能取的值, 可以取某一区间内的一切值, 这样的变量就叫做连续型随机变量.

(4) **离散型随机变量与连续型随机变量的区别与联系**: 离散型随机变量与连续型随机变量都是用变量表示随机试验的结果; 但是离散型随机变量的结果可以按一定次序一一列出, 而连续性随机变量的结果不可以一一列出.

(5) **传递性**: 若  $X$  是随机变量,  $Y = aX + b$  ( $a, b$  是常数) 则  $Y$  也是随机变量并且不改变其属性 (离散型、连续型).

#### ★ 2、离散型随机变量的分布列

(1) **概率分布 (分布列)**: 设离散型随机变量  $X$  可能取的不同值为  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ ,

$X$  的每一个值  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的概率  $P(X = x_i) = p_i$ , 则称表:

|     |       |       |         |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|---------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_i$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_i$ | $\dots$ | $p_n$ |

为随机变量  $X$  的概率分布, 简称  $X$  的分布列.

(2) **性质**: ①  $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ ; ②  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

(3) ① **期望**:  $E\xi = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n + \dots$

② **方差**:  $D\xi = (x_1 - E\xi)^2 \cdot p_1 + (x_2 - E\xi)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E\xi)^2 \cdot p_n + \dots$

③ **方差与期望的关系**:  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$ .





## 小课堂



## 概率分布

### ★ 1、两点分布(伯努利分布)

(1)概念:若随机变量  $X$  只取 0 和 1 两个值,则称随机变量  $X$  服从参数为  $p$  的伯努利分布

(2)随机变量  $X$  的分布列为:

|     |       |     |
|-----|-------|-----|
| $X$ | 0     | 1   |
| $P$ | $1-p$ | $p$ |

(3)两点分布记为:  $B(1, P)$ . 期望  $E(X) = p$  方差  $D(X) = p(1-P)$

### ★ 2、二项分布

(1)独立重复试验( $n$ 重伯努利试验)

①定义:一般地,在相同条件下重复做的  $n$  次随机试验称为  $n$  次独立重复试验.

②独立重复试验的概率公式在 1 次试验中某事件发生的概率是  $p$ ,那么在  $n$  次独立重复试验中这个试验恰好发生  $k$  次的概率:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

(2)二项分布

一般地,在  $n$  次独立重复试验中,  $\xi$  表示事件  $A$  发生的次数. 如果事件  $A$  发生的概率是  $p$ ,则不发生的概率  $q = 1-p$ ,  $n$  次独立重复试验中,事件  $A$  发生  $k$  次的概率是:  $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, 3, \dots, n)$ ,那么就说  $\xi$  服从参数  $p$  的二项分布,其中  $p$  称为成功概率. 记作:  $\xi \sim B(n, p)$ . 期望  $E(X) = np$ , 方差  $D(X) = np(1-P)$

于是得到随机变量  $X$  的概率分布如下:

|       |                 |                     |     |                     |     |                 |
|-------|-----------------|---------------------|-----|---------------------|-----|-----------------|
| $\xi$ | 0               | 1                   | ... | $k$                 | ... | $n$             |
| $P$   | $C_n^0 p^0 q^n$ | $C_n^1 p^1 q^{n-1}$ | ... | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | ... | $C_n^n p^n q^0$ |

(3)判断一个随机变量是否服从二项分布,关键有三点:

①对立性:即一次试验中事件发生与否二者必居其一;

②重复性:即试验是独立重复地进行了  $n$  次;是有放回抽样.

③等概率性:在每次试验中事件发生的概率均相等.



### ★ 3、超几何分布

(1) **定义:**一般地, 在含有  $M$  件次品的  $N$  件产品中, 任取  $n$  件, 其中恰有  $X$  件次品数, 则事件  $\{X=k\}$  发生的概率为  $P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} (k=0, 1, 2, 3 \cdots m)$ , 此时我们称随机变量

$X$  服从超几何分布, 记作:  $H(N, M, n)$ ;  $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$ ,  $D(X) = n \cdot \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

于是得到随机变量  $X$  的概率分布如下:

|     |                                     |                                     |     |                                     |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|
| $X$ | 0                                   | 1                                   | ... | $m$                                 |
| $P$ | $\frac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$ | $\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$ | ... | $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ |

(2) 注: ①超几何分布的模型是不放回抽样;

②超几何分布中的参数是  $M, N, n$ . 其意义分别是: 总体中的个体总数、 $N$  中一类的总数、样本容量.

### ★ 4、正态分布(高斯分布)

(1) **定义:**若随机变量  $X$  服从一个位置参数为  $\mu$ 、尺度参数为  $\sigma$  的概率分布, 且其概率

密度函数为:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 则这个随机变量就称为正态随机变量, 正态随机变量服从的分布就称为正态分布, 记作  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

(2) **性质:** ①曲线是单峰的, 它关于直线  $x = \mu$  对称; 曲线与  $x$  轴之间的面积为 1;

②曲线在  $x = \mu$  时达到峰值  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ;

③当  $x < \mu$  时, 曲线上升; 当  $x > \mu$  时, 曲线下降. 并且当曲线向左、右两边无限延伸时, 以  $x$  轴为渐近线, 向它无限靠近.

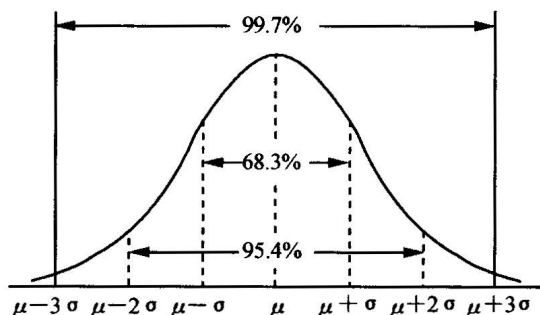
(3) **期望、方差:**  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$

(4) **正态分布在三个特殊区间的概率值:**

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.683;$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954;$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997.$$



小课堂





## 寄语

很多人在这个阶段都不知道是为什么而学习,我自己也有过这样疑问,在那个时候我给出的答案和现在各位的答案不谋而合,具体是什么呢,这个答案已经在各位心中. 通过多年的学习、工作,慢慢的我似乎对当年为什么要读书,为什么要那么努力的学习有了新的答案,在这里我和大家分享:读书学习不是希望我们能学到多少书本上的内容,最终的目的都是希望我们找寻到心的归宿、掌握一门能让你将来自食其力的技术以及对客观物质世界的形形色色能有自己的思考和认知. 而现在的学习就是达到目的的手段和工具. 此时的你具备了很多优点:早起早睡,能静下心来读一本书或者时不时的锻炼身体等等. 不要小看这些你平时已经习以为常的事,它们正在帮助你养成成功必备的关键因素:习惯和毅力. 每天学习到的书本知识也在潜移默化的影响着你对世界和环境的思考和认知.

每个人的一生似乎都是平平淡淡,改变自己命运的机会并非只受单一因素的影响,天时地利人和缺一不可. 大部分人最终都掉进社会大染缸,平平淡淡过完自己的一生,虽然如此,也希望各位的生活中有惊喜、有憧憬、有未来……. 作为单一的受教育者,接受教育和学习的目的正如曹雪芹在红楼梦里所说:“世事洞明皆学问,人情练达即文章”. 但作为一个中学生想必各位都有自己远大的抱负. 学生时代的我听到北宋时期理学家张载说的四句话:“为天地立心,为生民立命,为往圣继绝学,为万世开太平”振聋发聩,觉得自己的一生就应该做这样一个人. 又或每次看到我们的帅气威武的兵哥哥也曾想过投笔从戎,去体验不一样的生活人生经历. 到了大学以后现实生活中纷乱繁华也很让人迷恋,但是带给自己更多的是迷茫.

教育是人点亮人的工作,我一直都觉得,衡量一个学生好坏的标准并不是只有学习,每个学生身上都有自己的亮点. 从我自己的经历上得到的两个基本理念:第一、人生在世要想做好一件事,需要的是懂得坚持的毅力和个人的行为习性的助力. 第二、人的潜力是无穷的,只要想做成功一件事,并且能为之付出自己的实际行动,那九天揽月就不仅仅是梦想.

王阳明的核心理念:知行合一,希望各位学子亦能做到知行合一,每个人都知道高中阶段的重要性,也清楚高考对各位意味着什么,但是我们有些人往往行动上一直都处于落后阶段,你如果在行动上先别人而行,那你一定会名列前茅,思想和行动能保持一直,那你一定不会屈于人后。

最后,送给各位一句话:知行合一,此心光明,亦复何言。

