Teoría – Tema 6

Teoría - 14 - Método directo para obtener la inversa de una matriz

Método directo para obtener matriz inversa

La definición de matriz inversa en matrices cuadradas de orden n nos dice que, si existe, la matriz A^{-1} satisface la siguiente igualdad:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Donde I es la matriz identidad de orden n .

Para obtener A^{-1} planteamos el sistema resultante de la ecuación $A\cdot A^{-1}=I$, donde los coeficientes de A^{-1} son incógnitas. Si el resultado es un sistema incompatible, implica que no existe matriz inversa.

Si una matriz A admite inversa, esta inversa es única.

Ejemplo 1 resuelto

¿Existe la inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ **?**

Suponemos $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $A\cdot A^{-1}=I$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \rightarrow \text{Igualamos a } I \rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix}2x-z & 2y-t\\ 0+3z & 0+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2x-z & 2y-t\\ 3z & 3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{Bmatrix}2x-z=1\\ 2y-t=0\\ 3z=0\\ 3t=1\end{Bmatrix} \rightarrow \text{Resolvemos} \rightarrow \quad t=\frac{1}{3} \ , \ z=0 \ , \ y=\frac{1}{6} \ , \ x=\frac{1}{2}$$

Es decir, la matriz inversa resulta $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Y se cumple:

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2 resuelto

¿Existe la inversa de $B=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **?**

Suponemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $B\cdot B^{-1}=I$.

$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ → Igualamos a I → $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix} -6x-3z & -6y-3t \\ 4x+2z & 4y+2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$\begin{Bmatrix} -6x-3z=1 \\ -6y-3\mathrm{t}=0 \\ 4x+2z=0 \\ 4y+2t=1 \end{Bmatrix}$ → Resolvemos por Gauss → $\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → $F'_3=6\cdot F_3+4\cdot F_1$,

$F'_4=6\cdot F_4+4\cdot F_2$ → $\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ → Encontramos incongruencias en las filas F_3 y F_4 → Sistema incompatible → No existe solución → La matriz B no admite inversa.