Soluzione della trisezione dell'angolo per Pappo

Problema

Dato un angolo φ, trovare l'angolo $\frac{\varphi}{3}$.

Metodo

Per risolvere il problema della trisezione dell'angolo, Pappo utilizzò la neusis.
Si procede, dunque, per intersezione di coniche.

Costruzione tramite GeoGebra

1. Siano $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$.
2. Si crei lo slider dell'angolo φ compreso tra 0 e 89.
3. Sia $t = tan(\varphi^o)$.
4. Sia $C = (1, t)$. Allora $B\hat{A}C = \varphi$.
5. Si costruisca il segmento $\overline{BC}$.
6. Si costruisca la retta i parallela ad AB e passante per C.
7. Tramite neusis, si costruisca la retta passante per A che interseca i e $\overline{BC}$ in due punti E ed F tali che $\overline{EF} = 2\overline{AC}$:
   - Si costruisca l'iperbole $p(x):\ y = \dfrac{y_C x + y_B x_B - y_C x_B}{x}$ ovvero $y = \dfrac{tx - t}{x}$.
   - Si costruisca la circonferenza c di centro B e raggio $2\overline{AC}$.
   - Sia $p'(x) = \begin{cases} p(x) & x > 1 \\ 10000 & altrove \end{cases}$.
     (Comando: $p'(x) = Se[x > 1, p(x), 10000]$)
   - Sia D il punto di intersezione tra $p'(x)$ e la circonferenza.
     (Comando: $D = Intersezione(p', c)$)
   - Si costruisca la retta parallela a $\overline{BC}$ passante per D. Sia E il suo punto di intersezione con la retta i.
   - Si costruisca il segmento $\overline{AE}$ e sia F il suo punto di intersezione con il segmento $\overline{BC}$.
8. (facoltativo) Sia $u = \frac{\varphi}{3}$ e si renda visibile il suo valore sullo schermo.
9. Si costruiscano gli angoli $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}F$. Si renda visibile il valore di quest'ultimo.

Utilizzo

Si selezioni il valore di φ desiderato.
Allora $F\hat{A}B = \frac{\varphi}{3}$.

Dimostrazione

Sia G il punto medio tra F ed E ($\overline{FG} = \overline{GE}$).

- Poichè il triangolo $\triangle FCE$ è rettangolo per costruzione, allora $\overline{FG} = \overline{GC} = \overline{GE} = \overline{AC}$.
- $\Rightarrow$ i triangoli $\triangle ACG$ e $\triangle CGE$ sono isosceli.
- $\Rightarrow C\hat{A}G = C\hat{G}A$ e $G\hat{C}E = G\hat{E}C$.
- Poichè $C\hat{G}A$ è angolo esterno al triangolo $\triangle CGE$, allora $C\hat{G}A = G\hat{C}E + G\hat{E}C = 2C\hat{E}G$.
- Ma $C\hat{E}G = F\hat{A}B$ poiché angoli alterni interni.
- $\Rightarrow C\hat{A}F = C\hat{G}A = 2B\hat{A}F$.
- $\Rightarrow B\hat{A}C = B\hat{A}F + F\hat{A}C = B\hat{A}F + 2B\hat{A}F = 3B\hat{A}F$.
- $\Rightarrow B\hat{A}F = \dfrac{1}{3}B\hat{A}C$.