

# FUNÇÃO DO 2º GRAU

Professora Laura

## 1. Definição

Chamamos de função do 2º grau, ou também função quadrática, toda função que assume a forma:

$$f : R \rightarrow R; f(x) = ax^2 + bx + c \text{ onde } a, b, c \in R \text{ e } a \neq 0.$$

Podemos classificar as funções do segundo grau de duas formas:

Completas

a)  $f(x) = x^2 + 6x + 8$

b)  $y = 3x^2 - 12x + 8$

Incompletas

a)  $y = x^2 - 6x$

b)  $f(x) = -x^2 + 4$

c)  $f(x) = 3x^2$

## 2. Propriedades da Função Quadrática

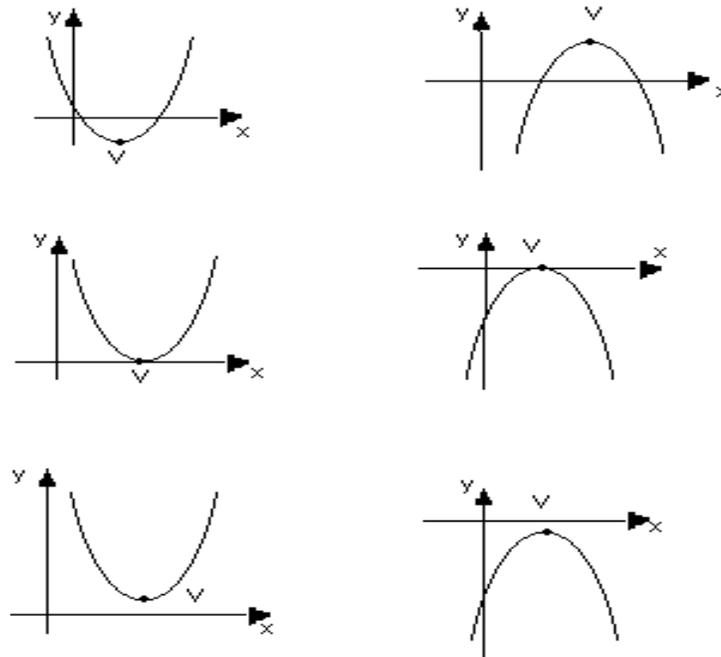
- Função Algébrica Racional Inteira
- Não sobrejetora e não injetora
- Gráfico: é uma curva chamada parábola, cujo eixo de simetria, que passa pelo vértice, é perpendicular ao eixo  $x$ . O eixo de simetria divide a parábola ao meio
- Vértice da parábola: é o ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria.  
Demonstra-se que as coordenadas do vértice são  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e  $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$
- Se  $a > 0$  então a concavidade da parábola é voltada para cima
- Se  $a < 0$  então a concavidade da parábola é voltada para baixo
- $c$  é o ponto onde a parábola toca o eixo das ordenadas
- Raízes:  $x_1$  e  $x_2$ , são os pontos onde  $f(x) = 0$ ,  $ax^2 + bx + c = 0$ . As raízes da função são os pontos onde ela toca o eixo das abscissas  
As raízes são encontradas utilizando a Fórmula de Bháskara
- Pontos Extremos  
A função terá um ponto de mínimo se  $a > 0$   
A função terá um ponto de máximo se  $a < 0$   
O ponto de máximo ou de mínimo coincide com o vértice da parábola
- A imagem da função

$$\text{Se } a > 0 \text{ então } f(x) \geq y_v$$

$$\text{Se } a < 0 \text{ então } f(x) \leq 0$$

## 3. Gráfico

Gráfico de uma função quadrática pode assumir 6 configurações diferentes:



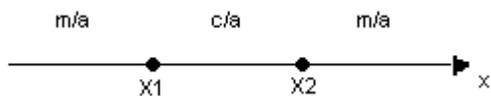
### 3.1. Método Prático para a confecção do Gráfico

- 1° Passo: Determine a concavidade da parábola avaliando o valor de  $a$ .
- 2° Passo: Determinar onde a parábola intercepta o eixo- $y$ , avaliando o valor de  $c$
- 3° Passo: Determinar onde a parábola intercepta o eixo- $x$ , para tal basta achar suas raízes.
- 4° Passo: Encontre as coordenadas do Vértice  $X_v$  e  $Y_v$
- 5° Passo: Marque as informações obtidas no gráfico
- 6° Passo: Trace o Gráfico.

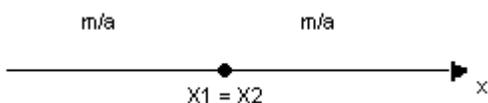
Exemplo:  $y = x^2 - 5x + 6$

### 4. Estudo do Sinal

1° caso:  $a > 0$



2° caso:  $a < 0$



3° caso:  $a = 0$



O estudo da variação do sinal da função quadrática é bastante útil na resolução das inequações produto e quociente, além de auxiliar no cálculo de domínio de funções.

Exemplos:

$$\text{a) } \frac{-x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4} < 0 \qquad \text{b) } \frac{x^2 - x}{2x + 4} \geq 1$$

## 5. Exercícios

1) (Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$ , onde k é uma constante positiva característica do boato.

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11.000.    b) 22.000.    c) 33.000.    d) 38.000.    e) 44.000.

2) (UFMS) Da frieza dos números da pesquisa saíram algumas recomendações. Transformadas em políticas públicas, poderiam reduzir a gravidade e as dimensões da tragédia urbana do trânsito.

-A primeira é a adoção de práticas que possam reduzir a gravidade dos acidentes.

-A segunda recomendação trata dos motociclistas, cuja frota equivale a 10% do total, mas cujos custos correspondem a 19%. O 'motoboy' ganha R\$2 por entrega, a empresa, R\$8. É um exército de garotos em disparada.

O pedestre forma o contingente mais vulnerável no trânsito e necessita de maior proteção, diz a terceira recomendação da pesquisa. Entre a 0h e às 18h da quinta-feira, as ambulâncias vermelhas do Resgate recolheram 16 atropelados nas ruas de São Paulo.

Fonte: "Folha de São Paulo" (adaptado).

A 100 m de um semáforo, o motorista de um automóvel aplica os freios de modo suave e constante, a fim de imprimir uma força de frenagem constante até o repouso. Após a freada, foram coletados os seguintes dados:

Intervalo de tempo	Distância percorrida pelo automóvel
entre 0 e 1s	30m
entre 1 e 2s	25m

Considerando que a distância do automóvel ao semáforo, no instante de tempo  $t$ , é dada pela função quadrática  $s(t) = (1/2)at^2 - vt + 100$ , onde  $a$  é a aceleração constante imprimida no instante da freada e  $v$ , a velocidade no instante da freada, o tempo necessário para o automóvel atingir a posição onde está localizado o semáforo é, em segundos,

- a) 4,5      b) 4,6      c) 4,8      d) 4,9      e) 5

3) (Puccamp) O biodiesel resulta da reação química desencadeada por uma mistura de óleo vegetal (soja, milho, mamona, babaçu e outros) com álcool de cana. O ideal é empregar uma mistura do biodiesel com diesel de petróleo, cuja proporção ideal ainda será definida. Quantidades exageradas de biodiesel fazem decair o desempenho do combustível.

Seja  $f$  a função desempenho do combustível obtido pela mistura de biodiesel com combustível de petróleo, dada por  $f(p) = 12p - p^2$ , em que  $p$  é a porcentagem de biodiesel na mistura,  $0 \leq p \leq 12$ . O valor de  $p$  que gera o melhor desempenho é tal que

- a)  $p < 0,06$     b)  $0,06 \leq p < 0,6$     c)  $0,6 \leq p \leq 5,8$     d)  $5,8 < p \leq 6,2$     e)  $p > 6,2$

4) (Unesp) O gráfico da função quadrática definida por  $y=x^2-mx+(m-1)$ , onde  $m$  pertence ao conjunto dos Reais, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então, o valor de  $y$  que essa função associa a  $x=2$  é:

- a) - 2.    b) - 1.    c) 0.    d) 1.    e) 2.

5) (ITA) Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é:

Tempo (s)	Concentração (moles)
1	3,00
2	5,00
3	1,00

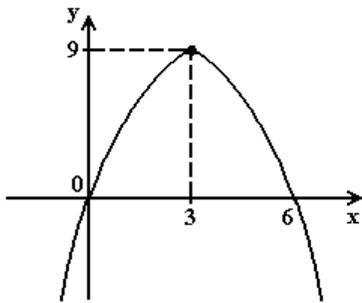
- a) 3,60    b) 3,65    c) 3,70    d) 3,75    e) 3,80

6) (UFMG) A função  $f(x)$  do segundo grau tem raízes  $-3$  e  $1$ . A ordenada do vértice da parábola, gráfico de  $f(x)$ , é igual a  $8$ .

A única afirmativa VERDADEIRA sobre  $f(x)$  é:

- a)  $f(x) = -2(x-1)(x+3)$
- b)  $f(x) = -(x-1)(x+3)$
- c)  $f(x) = -2(x+1)(x-3)$
- d)  $f(x) = (x-1)(x+3)$
- e)  $f(x) = 2(x+1)(x-3)$

7) (UFPE) O gráfico da função  $y=ax^2+bx+c$  é a parábola da figura a seguir. Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são, respectivamente:



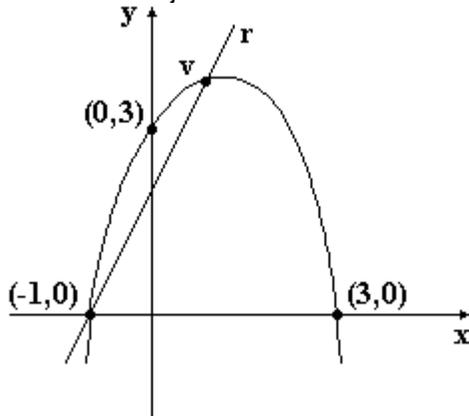
- a)  $1, -6$  e  $0$
- b)  $-5, 30$  e  $0$
- c)  $-1, 3$  e  $0$
- d)  $-1, 6$  e  $0$
- e)  $-2, 9$  e  $0$

8) (PUC-SP) Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é  $x-10$ , sendo  $x$  o preço de venda e  $10$  o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a  $70-x$ .

Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de  $x$ , cujo valor máximo, na unidade monetária usada, é

- a)  $1200$
- b)  $1000$
- c)  $900$
- d)  $800$
- e)  $600$

9) (UFSC) Assinale a ÚNICA proposição CORRETA. A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola cujo vértice é o ponto  $V$ . A equação da reta  $r$

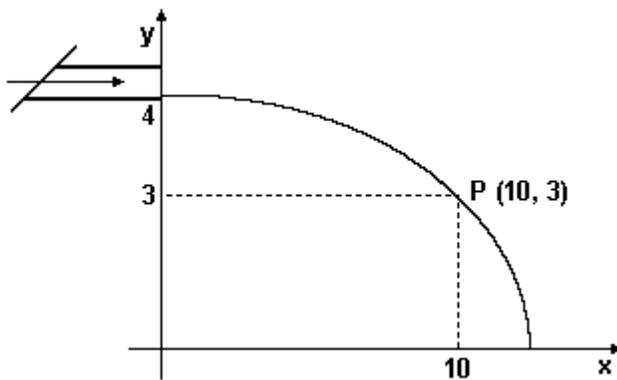


é:

- a)  $y = -2x + 2$ .      b)  $y = x + 2$ .      c)  $y = 2x + 1$ .  
d)  $y = 2x + 2$ .      e)  $y = -2x - 2$ .

10) (Mackenzie) Se a função real definida por  $f(x) = -x^2 + (4 - k^2)$  possui um máximo positivo, então a soma dos possíveis valores inteiros do real  $k$  é:  
a) - 2.   b) - 1.   c) 0.   d) 1.   e) 2.

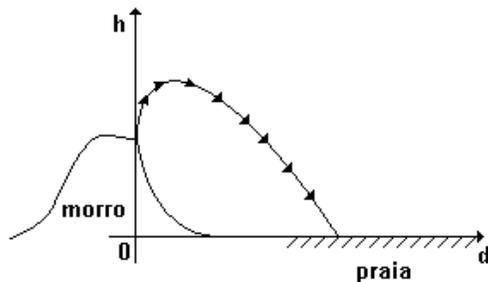
11) (Faap) A água que está esguichando de um bocal mantido horizontalmente a 4 metros acima do solo descreve uma curva parabólica com o vértice no bocal. Sabendo-se que a corrente de água desce 1 metro medido na vertical nos primeiros 10 metros de movimento horizontal, conforme a figura a seguir:



Podemos expressar  $y$  como função de  $x$ :

- a)  $y = -x^2 + 4x + 10$       b)  $y = x^2 - 10x + 4$       c)  $y = (-x^2/10) + 10$   
d)  $y = (-x^2/100) + 10x + 4$       e)  $y = (-x^2/100) + 4$

12) (Unirio)



Um projétil é lançado do alto de um morro e cai numa praia, conforme mostra a figura anterior. Sabendo-se que sua trajetória é descrita por  $h = -d^2 + 200d + 404$ , onde  $h$  é a sua altitude (em m)

e d é o seu alcance horizontal (em m), a altura do lançamento e a altitude máxima alcançada são, respectivamente:

- a) superior a 400m e superior a 10km.
- b) superior a 400m e igual a 10km.
- c) superior a 400m e inferior a 10km.
- d) inferior a 400m e superior a 10km.

13) (UFSM) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação  $v(t) = at^2 + b$ , onde  $v(t)$  é o número de elementos vivos no tempo  $t$  (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando  $t=12$  meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10º mês é

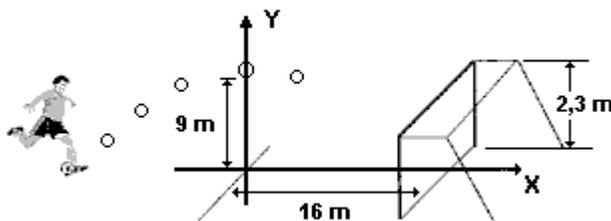
- a) 80
- b) 100
- c) 120
- d) 220
- e) 300

14) (UFPE) Uma mercearia anuncia a seguinte promoção: "Para compras entre 100 e 600 reais compre  $(x + 100)$  reais e ganhe  $(x/10)\%$  de desconto na sua compra". Qual a maior quantia que se pagaria à mercearia nesta promoção?

- a) R\$ 300,50
- b) R\$ 302,50
- c) R\$ 303,50
- d) R\$ 304,50
- e) R\$ 305,50

15) (UERJ) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

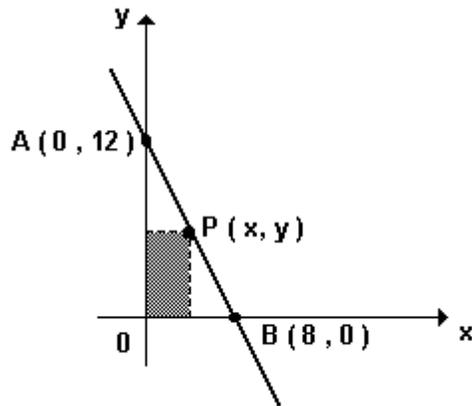
A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir:



A equação da parábola era do tipo:  $y = (-x^2/36) + c$ . O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

- a) na baliza
- b) atrás do gol
- c) dentro do gol
- d) antes da linha do gol

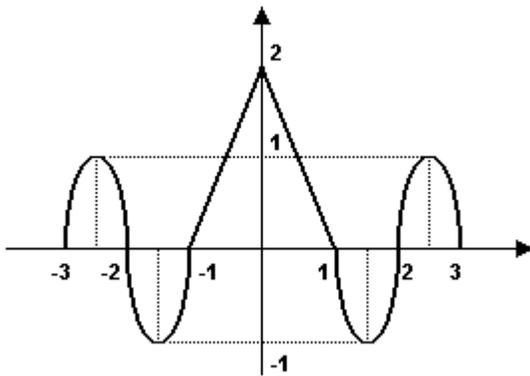
16) (UFMS)



A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos  $A(0,12)$  e  $B(8,0)$ . As dimensões  $x$  e  $y$  do retângulo, para que sua área seja máxima, devem ser, respectivamente, iguais a

- a) 4 e 6                      b) 5 e  $9/2$                       c) 5 e 7  
 d) 4 e 7                      e) 6 e 3

17) (Fuvest) A função  $f(x)$ , definida para  $-3 \leq x \leq 3$ , tem o seguinte gráfico:

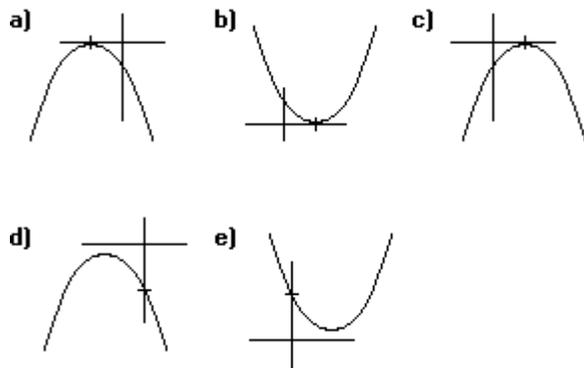


Onde as linhas estão ligando  $(-1,0)$  a  $(0,2)$  e  $(0,2)$  a  $(1,0)$  são segmentos de reta.

Supondo  $a \leq 0$ , para que valores de  $a$  o gráfico do polinômio  $p(x)=a(x^2-4)$  intercepta o gráfico de  $f(x)$  em exatamente 4 pontos distintos?

- a)  $-1/2 < a < 0$                       b)  $-1 < a < -1/2$                       c)  $-3/2 < a < -1$   
 d)  $-2 < a < -3/2$                       e)  $a < -2$

18) (Unesp) Considere a função  $f(x) = [1/(4a)]x^2 + x + a$ , onde  $a$  é um número real não nulo. Assinale a alternativa cuja parábola poderia ser o gráfico dessa função.



Gabarito:

1) B	2) E	3) D	4) D	5) D	6) A
7) D	8) C	9) D	10) C	11) E	12) A
13) D	14) B	15) C	16) A	17) B	18) C