TEMA 10 - RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

10.1.ECUACIONES DE LA RECTA

Para hallar la ecuación de una recta en el espacio necesito:

- Dos puntos
- Un punto y su vector director

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y un vector $\vec{v} = (a,b,c)$.
Si me dan dos puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ $\Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$ y como vector $\vec{v} = \vec{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + k.(a,b,c) \quad \forall k \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \quad \forall k \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

Ecuación implícita (como intersección de dos planos): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

<u>Ejemplo 1</u> : Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1-3)

$$r: \begin{cases} \text{Punto}: P(1,0,-1) \\ \text{Vector}: \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,-3) - (1,0,-1) = (1,1,-2) \end{cases}$$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (1,0,-1) + \lambda.(1,1,-2) \quad \forall \lambda \in R$

Ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x - 1 = y \\ -2x + 2 = z + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x - z = -1 \end{cases}$

<u>Ejemplo 2</u>: Hallar dos puntos y un vector de las siguientes rectas:

a) (x,y,z) = (2,0,-1) + t.(1,2,3) Puntos: $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow P_1(2,0,-1) \\ t = 1 \Rightarrow P_2(3,2,2) \end{cases}$ Vector: (1,2,3)

b) $\begin{cases} \mathbf{x = 1 + \lambda} \\ \mathbf{y = -\lambda} \\ \mathbf{z = 3 - 4\lambda} \end{cases}$ Puntos: $\begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow P_1(1,0,3) \\ \lambda = 1 \Rightarrow P_2(2,-1,-1) \end{cases}$ Vector (1,-1,-4)

c) $\mathbf{\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{3}}$ Puntos $\begin{cases} P_1(-1,1,-2) \\ x = 0 \Rightarrow P_2(0,3,-\frac{1}{2}) \end{cases}$ Vector (2,4,3)

d) $\begin{cases}\mathbf{x+2y+z=3}\\ \mathbf{2x-y+3z=4}\end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\2&-1&3&4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&-5&1&-2\end{array}\right)\approx\begin{cases}x+2y+z=3\\-5y+z=-2\end{cases}$

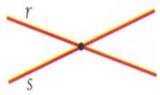
$$\begin{cases}y=\alpha\\ z=5\alpha-2\\ x=3-2\alpha+2-5\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=5-7\alpha\\ y=\alpha\\ z=5\alpha-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\text{Puntos}:\begin{cases}P_1(5,0,-2)\\P_2(-2,1,3)\end{cases}\\ \text{Vector}:(-7,1,5)\end{cases}$$

Nota: Otra forma de hallar el vector $\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=(7,-1,-5)$

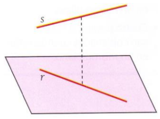
10.1.1. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Coincidentes

Paralelas



Secantes



Se cruzan

Conocido un punto y un vector director de cada una de las rectas:

$r:\begin{cases}\text{Sea } A(a_1,a_2,a_3) \text{ un punto de esta recta}\\ \text{Sea } \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \text{ un vector director}\end{cases}$ $s:\begin{cases}\text{Sea } B(b_1,b_2,b_3) \text{ un punto de esta recta}\\ \text{Sea } \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \text{ un vector director}\end{cases}$

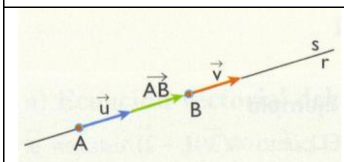
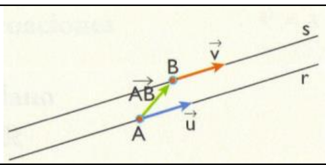
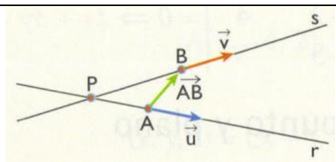
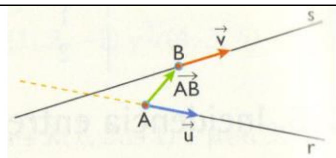
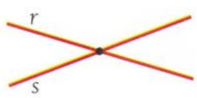
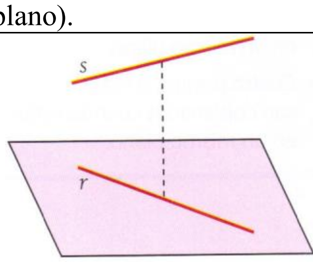
para estudiar la posición relativa de las dos rectas r y s, se estudia la dependencia lineal de los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3),\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \text{ y } \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$$

que es lo mismo que estudiar el rango de la matriz:

$$M=\begin{pmatrix}b_1-a_1&b_2-a_2&b_3-a_3\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}$$

Pueden darse los siguientes casos:

El rango de M es 1	*El rango de M es 2. Pueden darse dos casos:*		*El rango de M es 3*
Las coordenadas de los tres vectores son proporcionales.	Las coordenadas de los vectores directores son proporcionales. Rango $\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=1$	Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Rango $\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=2$	Los tres vectores son independientes y, por lo tanto, las rectas no están en el mismo plano.
			
Las dos rectas son **coincidentes**.	Las rectas son **paralelas** (las dos rectas no tienen puntos comunes pero están contenidas en el mismo plano).	Las rectas son **secantes** (las dos rectas se cortan en un solo punto).	Las rectas **se cruzan** (las dos rectas no tienen puntos comunes, ni están contenidas en el mismo plano).
			

<u>Ejemplo</u> : Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

a) $r:\begin{cases} x=-5\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases}$ s: $\begin{cases} x=2-3\alpha \\ y=3-5\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ Vectores directores no paralelos, se Cruzan o se cortan

$\overrightarrow{AB}=(2-0,3-2,0-5)$ $\vec{u}=(-5,1,-1)$ y $\vec{v}=(-3,-5,1)$

Determinamos el rango de M= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ Rango M = 3 $\Rightarrow$ Se cruzan.

b) $r:\begin{cases} x=3-5\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases}$ s: $\dfrac{x-1}{10}=\dfrac{4-y}{2}=\dfrac{z}{2}$ Vectores directores paralelos: paralelas o coincidentes

Tomamos un punto de r, (3,2,5) y comprobamos si cumple s: $\dfrac{3-1}{10}=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{5}{2}$ o

No lo cumple cumple, por tanto , paralelas.

Si utilizamos el método anterior: $\overrightarrow{AB}=(1-3,4-2,0-5)$ $\vec{u}=(-5,1,-1)$ y $\vec{v}=(10,-2,2)$

Determinamos el rango de M= $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ -5 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Rango M = 2

$\Rightarrow$ Son paralelas.

$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ Y rango de la matriz formada por los vectores directores es 1

c) $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ s: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ Vectores directores paralelos paralelas o coincidentes.

Cogemos un punto de s(3,2,2) y comprobamos si cumple r: $\begin{cases} 3=2+\lambda \\ 2=3-\lambda \\ 2=2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=1 \\ \lambda=1 \end{cases}$

Si la cumple, por tanto coincidentes.

Si utilizamos el método anterior: $\overrightarrow{AB}=(3-2,2-3,2-0)$ $\vec{u}=(1,-1,2)$ $\vec{v}=(-1,1,-2)$

Determinamos el rango de M= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Rango M = 1 $\Rightarrow$ Son coincidentes.

d) $r:\begin{cases} x=2-3t \\ y=3+5t \\ z=t \end{cases}$ **s: (x,y,z) = (1,0,5) + λ(-1,2,0)** Vectores no paralelos, se cruzan o se cortan.

Si utilizamos el método anterior: $\overrightarrow{AB} = (1\text{-}2, 0\text{-}3, 5\text{-}0)$ $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ $\vec{v} = (-3, 5, 1)$

Determinamos el rango de $M=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ Rango M = 2

$\Rightarrow$ Se cruzan

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ Y rango de la matriz formada por los vectores directores es 2

¿Y cómo determinamos el punto de corte de ambas rectas?
Método: Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada una de ellas (con distinto parámetro), las igualamos y resolvemos el sistema:

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2-3t=1-\lambda \\ 3+5t=2\lambda \\ t=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \\ \\ t=5 \rightarrow \lambda=14 \rightarrow 2-15=1-14 \rightarrow \text{Cierto} \end{cases}$

Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución, se cortan en un punto

Hallar el punto de corte, como t = 5 $\Rightarrow$ P(-13,28,5)

10.1.2. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTAS Y UN PUNTO EN EL ESPACIO

Aquí solo tenemos dos posibiliades: el punto pertenece a la recta o el punto no pertenece a la recta.

Lo único que tenemos que hacer para determinar esto, es sustituir las coordenadas del punto en alguna de las ecuaciones de la recta y ver si se verifican o no. En caso de que se verifiquen el punto pertenecerá a la recta y en caso de que no se verifique el punto no pertenecerá a la recta.

10.2. PLANOS

10.2.1 ECUACIONES DE UN PLANO EN EL ESPACIO.

Para determinar la ecuación de un plano en el espacio necesitamos:

- Tres puntos
- Un punto y dos vectores directores

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0,y_0,z_0)$ y dos vectores $\vec{v}_1 = (a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2,b_2,c_2)$
Si me dan tres puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0,y_0,z_0)$

y como vectores $\vec{v}_1 = \vec{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + s.(a_1,b_1,c_1) + t.\ (a_1,b_1,c_1) \qquad \forall\ s,t \in R$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_0 + s.a_1 + ta_2 \\ y = y_0 + s.b_1 + tb_2 \\ z = z_0 + s.c_1 + tc_2 \end{cases} \qquad \forall\ s,t \in R$

Ecuación implícita o general: $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal = $\vec{n} = (A,B,C) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (Es perpendicular a los dos vectores directores)
Nota: Si conocemos el vector normal y un punto podemos hallar directamente la ecuación general del plano. Del vector normal conocemos A, B y C ; y si sustituimos el punto hallamos D.

<u>Ejemplo 3</u> : Hallar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A(0,1,-1), B(2,3,-5), C(1,4,3)

$$\pi : \begin{cases} \text{Punto} : A(0,1,-1) \\ \text{Vectores} : \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (2,2,-4) \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = (1,3,4) \end{cases} \end{cases}$$

<u>Ecuación vectorial</u>**:** $(x,y,z) = (0,1,-1) + s.(2,2,-4) + t.(1,3,4) \qquad \forall\ s,t \in R$

<u>Ecuaciones paramétricas</u>**:** $\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 1 + 2s + 3t \\ z = -1 - 4s + 4t \end{cases} \qquad \forall\ s,t \in R$

<u>Ecuación implícita o general</u>**:** $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y - 1 & z + 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ 20x - 12(y-1) + 4(z+1) = 0 \Rightarrow 5x - 3y + z + 4 = 0$$

<u>Ejemplo 4</u>: Hallar dos punto, dos vectores y el vector normal

a) (x,y,z) = (1,2,3) + λ(4,5,6) +μ(1,0,3)

Puntos: $\begin{cases} P_1(1,2,3) \\ \lambda = 0, \mu = 1 \rightarrow P_2(2,2,6) \end{cases}$

Vectores: $\begin{cases} \overrightarrow{v_1}(4,5,6) \\ \overrightarrow{v_2}(1,0,3) \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_1} x \overrightarrow{v_2} = (15,-6,-5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x = 1 + 2\lambda + \mu} \\ \mathbf{y = 2\lambda - \mu} \\ \mathbf{z = 3 - \lambda} \end{cases}$ Puntos: $\begin{cases} P_1(1,0,3) \\ \lambda = 0, \mu = 1 \rightarrow P_2(2,-1,3) \end{cases}$ Vectores: $\begin{cases} \overrightarrow{v_1}(2,2,-1) \\ \overrightarrow{v_2}(1,-1,0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_1} x \overrightarrow{v_2} = (-1,-1,-4) \end{cases}$

c) x + 2y – z = 4 z = x + 2y -4 Puntos: P(0,0,-4), Q(1,1,-1), R(1,0,-3) $\vec{n}(1,2,-1)$

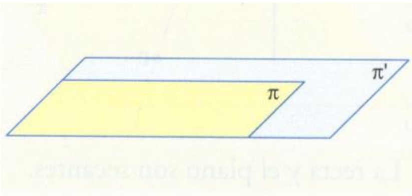
Vectores: $\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{PR} = (1,0,1) \end{cases}$

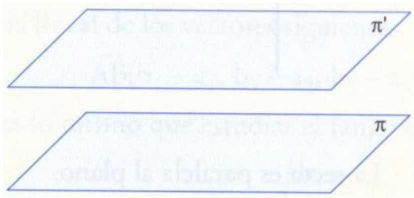
<u>Ejemplo 5</u> : Hallar la ecuación del plano, cuyo vector normal es (1,2,3) y pasa por el punto (2,0,4)

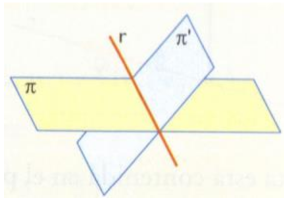
$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z + D = 0 \\ 2 + 2.0 + 3.4 + D = 0 \Rightarrow D = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$$

10.2.2. POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS EN EL ESPACIO.

10.2.2.1. POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO







Coincidentes Paralelos Secantes

Método: Escribimos las ecuaciones generales de cada uno de ellos y resolvemos el sistema:

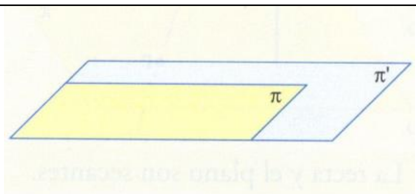
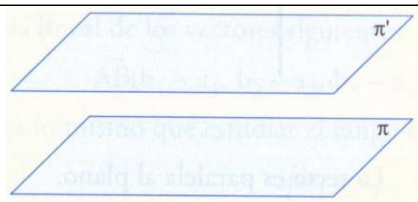
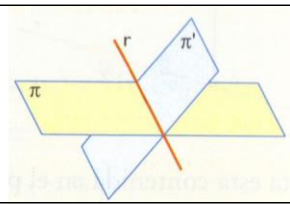
- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ No puede ser
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Se cortan en un plano o en una recta
    - Si hay un grado de libertad $\Rightarrow$ Un vector $\Rightarrow$ Se cortan en una recta $\Rightarrow$ Secantes

      Esto quiere decir que el rango de la matriz ampliada es 2 y entonces las soluciones dependen de 1 parámetro (nº incógnitas-rango de la ampliada)
    - Si hay dos grados de libertad $\Rightarrow$ Dos vectores $\Rightarrow$ Se cortan en un plano $\Rightarrow$ Coincidentes

      Esto quiere decir que el rango de la matriz ampliada es 1 y entonces las soluciones dependen de 2 parámetros (nº incógnitas-rango de la ampliada)
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

OTRA FORMA EQUIVALENTE:

Dados los planos $\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi': \ A'x+B'y+C'z+D'=0$ <u>pueden darse tres casos:</u>

$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'}$
		
Los planos son coincidentes	Los planos son paralelos	Los planos son secantes. Se cortan en una recta. *Las ecuaciones implícitas de una recta representan la intersección de dos planos.*

<u>Ejemplo</u> : Estudiar la posición relativa de los siguientes planos.

a) $\begin{cases} \mathbf{x-3y+4z-11=0} \\ \mathbf{4x-12y+16z+40=0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x-3y+4z-11=0} \\ \mathbf{2x-5y+z+3=0} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x-3y+4z-11=0} \\ \mathbf{2x-6y+8z-22=0} \end{cases}$

omparando sus vectores normales

a) $\frac{1}{4}=\frac{-3}{-12}=\frac{4}{16}=\frac{-11}{40}\Rightarrow$ La última igualdad no se cumple, paralelos

b) $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-5}=\frac{4}{1}=\frac{-11}{3}\Rightarrow$ Vectores normales no paralelos, se cortan en una recta.

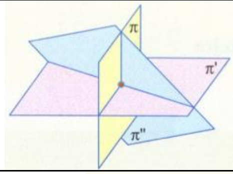
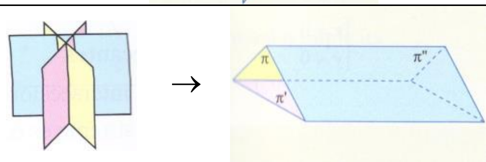
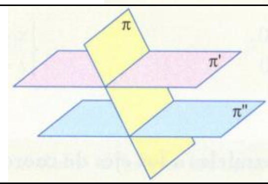
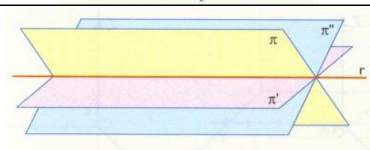
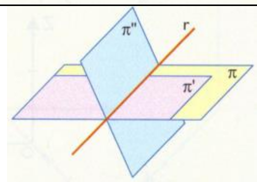
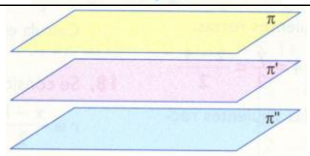
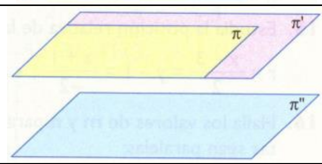
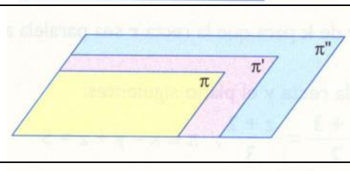
Si nos piden la recta, resolvemos el sistema y obtenemos la recta en paramétricas.

c) $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}=\frac{4}{8}=\frac{-11}{-22}\Rightarrow$ Se cumplen todas, coincidentes.

10.2.2.2. POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS EN EL ESPACIO.

Para determinar la posición relativa de tres planos en el espacio estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\begin{array}{l} \pi: \quad Ax + By + Cz = D \\ \pi': \quad A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi'': \quad A''x + B''y + C''z = D'' \end{array} \quad \rightarrow \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

<table>
<tr><td>Rango $M = 3$</td><td>Rango $M^* = 3$</td><td>S.C.D.</td><td>Los tres planos se cortan en un punto.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Rango $M = 2$</td><td rowspan="2">Rango $M^* = 3$</td><td rowspan="2">S.I.</td><td>Ninguno de los planos es paralelo a otro. Los tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática.</td><td></td></tr>
<tr><td>Dos planos son paralelos y el otro los corta.
2 filas de la matriz M son proporcionales</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rango $M^* = 2$</td><td rowspan="2">S.C.I.</td><td>Los tres planos no son coincidentes y se cortan en una recta. Pertenecen a un haz de planos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.
2 filas de la matriz M* son proporcionales</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rango $M = 1$</td><td rowspan="2">Rango $M^* = 2$</td><td rowspan="2">S.I.</td><td>Los tres planos son paralelos y distintos dos a dos.
las 3 filas de la matriz M son proporcionales.</td><td></td></tr>
<tr><td>Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo a ellos y distinto.
las 3 filas de la matriz M son proporcionales y 2 filas de la matriz M* son proporcionales</td><td></td></tr>
<tr><td>Rango $M^* = 1$</td><td>S.C.I.</td><td>Los tres planos son coincidentes.
las 3 filas de la matriz M* son proporcionales</td><td></td></tr>
</table>

<u>Ejemplo</u> : Estudiar la posición relativa de estos tres planos:

a) $\begin{cases} \mathbf{x+2y-z-3=0} \\ \mathbf{3y+2z-1=0} \\ \mathbf{x+y+z-2=0} \end{cases}$

a) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale compatible determinado, existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto P(7/4,1/2,-1/4)

b) $\begin{cases} \mathbf{2x-y+z-3=0} \\ \mathbf{x-y+z-2=0} \\ \mathbf{3x-y+z-4=0} \end{cases}$

b) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, se cortan en una recta. Como los planos no son paralelos entre se cortan los tres en una recta.

c) $\begin{cases} \mathbf{x-y+z-1=0} \\ \mathbf{3x+y-2z=0} \\ \mathbf{2x+2y-3z+4=0} \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema por Gauss y nos sale sistema incompatible, no tiene solución. Como ninguno es paralelo entre si, se cortan dos a dos en una recta (Tienda de campaña)

d) $\begin{cases} \\ \mathbf{2x+y+az=a} \\ \mathbf{x+ay+z=1} \end{cases}$

d) Como es un sistema con parámetros con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, hallamos el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=1, a=2$

CASO I: Si a = 1 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

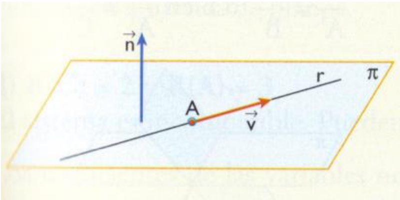
El primer y el tercer plano paralelos y el otros los corta en una recta.

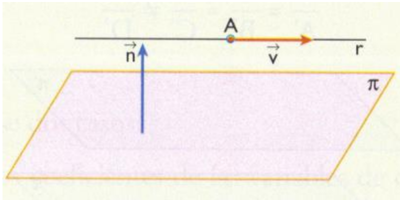
CASO II: Si a = 2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \ldots \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA}' = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible} \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{cases}$

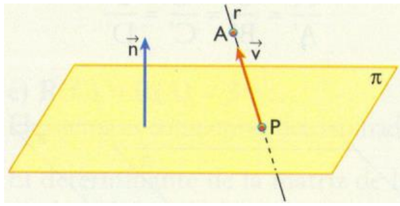
indeterminado con un grado de libertad (ninguno paralelo) se cortan en una recta.

CASO III: $a \in R - \{1,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Se cortan en un punto. Resolviendo (por Cramer o por Gauss) obtenemos el punto de corte en función de “a”.

10.2.2.3. POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO







Recta Contenida en el plano | Paralelos | Secantes

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y la general del plano y resolvemos el sistema:

- Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ Se cortan en un punto $\Rightarrow$ Secantes.
- Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ Se cortan en infinitos puntos $\Rightarrow$ Recta contenida en el plano.
- Sistema incompatible $\Rightarrow$ No existe solución $\Rightarrow$ No se cortan $\Rightarrow$ Paralelos.

Otra forma alternativa es usando en vector normal del plano y un punto y el verctor director de la recta.

Supuesto conocido los siguientes datos de la recta r y del plano π:

$$r:\begin{cases}\text{Sea } A(a_1,a_2,a_3) \text{ un punto de esta recta}\\ \text{Sea } \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \text{ un vector director}\end{cases}$$

$$\pi:\ Ax+By+Cz=D\ \left\{\ \text{Sea } \vec{n}=(A,B,C) \text{ un vector normal}\right.$$

para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se calcula el producto escalar $\vec{v}\cdot\vec{n}$.

<u>Pueden darse los siguientes casos:</u>

$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{n}$; $\Rightarrow$ Coincidentes
Si el punto $A\in\pi$

$\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{n}$; $\Rightarrow$ Paralelos
Si el punto $A\notin\pi$

$\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$ $\Rightarrow$ Secantes

<u>Ejemplo</u> : Estudiar la posición relativa de estos planos y rectas:

a) π: x – 3y+5z+11=0 **r:** $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 6t \end{cases}$

a) Sustituimos las ecuaciones de la recta en la ecuación del plano:
-2t + 3 -3(1 – t) + 5.(4 + 6t) + 11 = 0 ⇒ -2t + 3 -3 +3t + 20 + 30t + 11 = 0 ⇒ 31t + 31 = 0 ⇒ t = -1
Sistema compatible determinado. Existe una solución. Se cortan en un punto.
Si nos piden el punto de corte, sustituimos en las ecuaciones de la recta: P(5,2,-2)

b) $\frac{x-2}{3} = \frac{2y+2}{4} = z$ **-y + 2z - 1 =0**

b) Pasamos la recta a paramétricas y sustituimos en la ecuación del plano
-(2t-1) + 2t -1 = 0 ⇒ 0 = 0 ⇒ Sistema compatible indeterminado, existen infinitas soluciones ⇒ Recta contenida en el plano.

c) $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$ $x + 2y - z = 0$

c) (4t + 1) + 2(-t + 2) – 2t = 0 ⇒ 5 = 0 ⇒ Sistema incompatible, no tiene solución ⇒ Paralelos

10.2.2.4. POSICIÓN RELATIVA ENTRE PUNTO Y PLANO EN EL ESPACIO

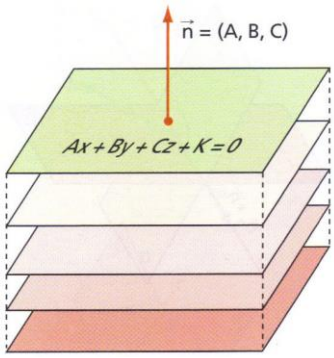
Aquí solo tenemos dos posibiliades: el punto pertenece a o el punto no pertenece a .

Lo único que tenemos que hacer para determinar esto, es sustituir las coordenadas del punto en alguna de las ecuaciones de y ver si se verifican o no. En caso de que se verifiquen el punto pertenecerá a y en caso de que no se verifique el punto no pertenecerá a .

10.2.3. HAZ DE PLANOS.

Haz de planos paralelos.

Si nos dan un plano de ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ los planos paralelos al mismo son de la forma: $Ax+By+Cz+k=0$, $k \in \mathbb{R}$ ya que todos ellos tienen el mismo vector normal $\vec{n}=(A,B,C)$.



Se llama **haz de planos paralelos** al conjunto de planos paralelos a uno dado.

El haz de planos queda determinado por un plano cualquiera del mismo.

Su ecuación es: $Ax+By+Cz+k=0$, $k \in \mathbb{R}$.

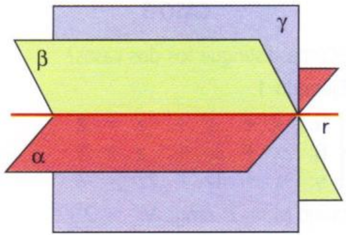
Haz de planos secantes.

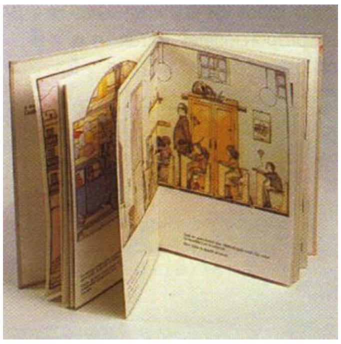
Si dos planos dados por sus ecuaciones se cortan en una recta r y un tercer plano pasa por esa misma recta, entonces las soluciones comunes de los dos primeros planos lo son también del tercero, luego éste es combinación lineal de ellos y se puede escribir que:

$$A''x+B''y+C''z+D''=t(Ax+By+Cz+D)+s(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

(para $s=0$ se obtiene el primer plano y para $t=0$, el segundo)

Análogamente, la ecuación de cualquier plano que pase por la recta intersección tiene las mismas soluciones.





Se llama **haz de planos secantes** al conjunto de planos que pasan por una recta que se llama <u>*arista del haz*</u>.

El haz queda determinado por dos planos distintos del mismo.

Su ecuación es: $t(Ax+By+Cz+D)+s(A'x+B'y+C'z+D')=0$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Dividiendo la ecuación entre t obtenemos otra expresión de la ecuación:

$$(Ax+By+Cz+D)+k(A'x+B'y+C'z+D')=0 \text{ siendo } k=\frac{s}{t}.$$

10.3. PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO.

10.3.1. ÁNGULOS

ANGULO ENTRE DOS RECTAS $\quad \cos(r_1,r_2) = \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{|\vec{v}_1 . \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| . |\vec{v}_2|}$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS $\quad \mathbf{\cos(\Pi_1, \Pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) =} \dfrac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|}$

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO $\quad \text{Sen}(r, \Pi) = \cos(\vec{v}_r, \vec{n}_\Pi) = \dfrac{|\vec{v}_r . \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| . |\vec{n}_\pi|}$

<u>Ejemplo</u> : Hallar el ángulo que forman las siguientes rectas:

$$\mathbf{r:}\ \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \qquad \mathbf{s:} \begin{cases} 2x+3y-5z=4 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$$

$$\cos(r,s) = \cos(v_r, v_s) \Rightarrow \begin{cases} v_r(5,3,-1) \\ v_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-10,-5,-7) \parallel (10,5,7) \end{cases} \Rightarrow \cos(v_r,v_s) =$$

$$\frac{|v_r . v_s|}{|v_r| . |v_s|} = \frac{|50+15-7|}{\sqrt{25+9+1}.\sqrt{100+25+49}} = \frac{58}{\sqrt{35}.\sqrt{174}} = 0{,}74 \Rightarrow \alpha = 41^\circ\ 59'\ 35{,}79''$$

<u>Ejemplo</u> : Hallar el ángulo que forman los siguientes planos:

$\boldsymbol{\pi_1}$ **: x + 8y – 4z = 0** $\qquad$ $\boldsymbol{\pi_2}$**: 2x – y + 3 = 0**

$$\cos(\pi_1,\pi_2) = \cos(n_{\pi 1}, n_{\pi 2}) = \frac{|n_{\pi 1} . n_{\pi 2}|}{|n_{\pi 1}| . |n_{\pi 2}|} = \frac{|2-8|}{\sqrt{1+64+16}.\sqrt{4+1+0}} = \frac{6}{\sqrt{81}.\sqrt{5}} = 0{,}3 \Rightarrow$$

$\alpha = 72^\circ\ 39'\ 14{,}16''$

<u>Ejemplo</u>: Hallar el ángulo que forman la recta y el plano:

r: (x,y,z) = (3,-1,1) + t.(2,5,-1) $\qquad$ $\boldsymbol{\pi}$**: 2x – 5y +7z – 11 = 0**

$$\text{sen}(r,\pi) = \text{sen}(v_r, n_\pi) = \frac{|v_r . n_\pi|}{|v_r| . |n_\pi|} = \frac{|4-25-7|}{\sqrt{4+25+1}.\sqrt{4+25+49}} = \frac{28}{\sqrt{30}.\sqrt{78}} = 0{,}57 \Rightarrow$$

$\alpha = 35^\circ\ 22'\ 5{,}54''$

<u>Ejercicio</u> : Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90º:

$$\mathbf{r:} \begin{cases} x = 2-5t \\ y = t \\ z = -2-t \end{cases} \qquad \mathbf{s:} \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2t \\ z = mt \end{cases}$$

$v_r . v_s = 0 \Rightarrow (-5,1,-1).(1,2,m) = 0 \Rightarrow -5 + 2 - m = 0 \Rightarrow m = -3$

10.3.2.DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

10.3.2.1.DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

10.3.2.2.DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{PP_r} \text{ x } \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}$$

10.3.2.3.DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO: $P(x_0,y_0,z_0)$, Π: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

10.3.2.4.DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

$$d(r,s) = \frac{\left|[v_r, v_s, P_rP_s]\right|}{|v_r \text{ x } v_s|}$$

10.3.2.5.DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

$d(r, \Pi) = d(P_r, \Pi)$

10.3.2.6.DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2)$

$$\text{Si } \begin{cases} \pi_1 : Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi_2 : Ax+By+Cz+D'=0 \end{cases} \Rightarrow d(\pi_1,\pi_2) = \frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

<u>Ejemplo</u> : Hallar la distancia entre los puntos P(1,2,0) y Q(2,-3,1)

$$d(P,Q) = \sqrt{(2-1)^2+(-3-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3.\sqrt{3}u = 5{,}2u$$

<u>Ejemplo</u> : Halla la distancia del punto P(5,-1,6) y la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x = 1-2t} \\ \mathbf{y = -t} \\ \mathbf{z = 5+t} \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} r : Pr(1,0,5),\ vr(-2,-1,1) \\ PPr = (-4,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow PP_r \text{ x } v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,6,6)$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{PP_r} \text{ x } \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{0+36+36}}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{12} = 2.\sqrt{3}u = 3{,}46u$$

<u>Ejemplo</u> : Halla la distancia del punto P(1,2,3) al plano π: 2x + 3y – z =-7

d(P, Π) = $\dfrac{|2.1+3.2-3+7|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} = 3{,}21\text{u}$

<u>Ejemplo</u> : Halla la distancia entre las rectas r: $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x=5+t}\\ \mathbf{y=-1}\\ \mathbf{z=8+2t}\end{array}\right.$ **s:** $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x=4+3t}\\ \mathbf{y=3-t}\\ \mathbf{z=5+4t}\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} r: P_r(5,-1,8), v_r(1,0,2)\\ s: P_s(4,3,5), v_s(3,-1,4)\end{array}\right\} P_rP_s(-1,4,-3) \Rightarrow [v_r, v_s, P_rP_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ -1 & 4 & -3\end{vmatrix} = [(3+0+24)-(2+16+0)] = 9$$

$$V_r \text{ x } V_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} = (2,2,-1) \Rightarrow d(r,s) = \frac{|[v_r, v_s, P_rP_s]|}{|v_r \text{ x } v_s|} = \frac{|9|}{\sqrt{4+4+1}} = 3\text{u}$$

<u>Ejemplo</u> : Halla la distancia entre la recta r: $\mathbf{\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-1}}$ **y el plano π: x – 3y –z + 6=0**

d(r, Π) = d(P_r, Π) = $\dfrac{|3-3.1-(-2)+6|}{\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{11}} = 2{,}41\text{u}$

<u>Ejemplo</u> : Halla la distancia entre dos planos: π_1: x – 5y + 2z – 19 = 0, π_2: 2x – 10y + 4z = 0

π_1: 2x – 10y + 4z – 38 = 0 ⇒ $d(\pi_1,\pi_2) = \dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|-38-0|}{\sqrt{4+100+16}} = \dfrac{38}{\sqrt{120}} = 3{,}47\text{ u}$

REPASO DE RECTAS Y PLANOS Y POSICIONES RELATIVAS

Ejercicio 1 : Obtén el valor de a para que las rectas r y s se corten y halla el punto de corte.

r: x = y = z – a **s:** $\mathbf{\frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}}$

Pasamos a paramétricas y resolvemos el sistema: $\begin{cases} \alpha = \dfrac{3\beta+1}{2} \\ \alpha = -2\beta - 3 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -3 \end{cases} \Rightarrow -7\beta = 7 \Rightarrow \\ \alpha + a = 2 \end{cases}$

$\beta = -1, \alpha = -1, a = 3 \Rightarrow$ P(-1.-1.2)

Ejercicio 2 : Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

r: $\mathbf{\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}}$ **s:** $\mathbf{\frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}}$

Los vectores directores proporcionales: $\frac{4}{m} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{n} \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = -3 \end{cases}$

Ejercicio 3 : Calcula m y n para que los planos: αααα: mx + y – 3z -1 = 0 ββββ: 2x + ny – z – 3 = 0 sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

Los vectores normales proporcionales: $\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} n = 1/3 \\ m = 6 \end{cases}$

Para que sean coincidentes: $\frac{6}{2} = \frac{1}{1/3} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$ No son coincidentes.

Ejercicio 4 : Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,0,0), (2,2,0) y (1,1,2)

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: A(0,0,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,2) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $4x - 4y = 0 \Rightarrow x - y = 0$

Ejercicio 5 : Determina la ecuación del plano que contiene al punto P(2,1,2) y a la recta $x-2=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}$

P(2,1,2), $P_r(2,3,4)$, $v_r(1,-1,-3)$

Plano: $\begin{cases}\text{Punto}: P(2,1,2)\\ \text{Vectores}: \begin{cases}\overrightarrow{PP_r}=(0,2,2)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,-3)\end{cases}\end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$ -4(x-2) + 2(y–1) -2(z-2)=0

-4x + 2y - 2z + 10 = 0 ⇒ -2x + y – z + 5 = 0

Ejercicio 6 : Comprueba que las rectas r: $\frac{x-1}{2}=y=z-2$ s: $\begin{cases}x-2z=5\\ x-2y=11\end{cases}$ son paralelas y halla la ecuación del plano que las contiene.

Vectores directores proporcionales: $v_r(2,1,1)$, v_s = $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}$ = (-4, -2, -2)

$P_r(1,0,2)$, $v_r(2,1,1)$, P_s (Por ejemplo z = 0, x = 5, y = -3 (5,-3,0))

Plano: $\begin{cases}\text{Punto}: P_r(1,0,2)\\ \text{Vectores}: \begin{cases}v_r(2,1,1)\\ P_rP_s=(4,-3,-2)\end{cases}\end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -3 & -2\end{vmatrix}=0$ (x – 1) + 8y -10(z – 2) = 0

x + 8y – 10z + 19 = 0

Ejercicio 7 : ¿Son coplanarios los puntos A(1,0,0), B(0,1,0), C(2,1,0), D(-1,2,1)?

Con tres puntos A, B y C hallamos el plano que los contiene y comprobamos si D ∈ Al plano

Plano: $\begin{cases}\text{Punto}: A(1,0,0)\\ \text{Vectores}: \begin{cases}AB=(-1,1,0)\\ AC=(1,1,0)\end{cases}\end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$ -2z = 0 ⇒ z = 0 ⇒ D no cumple que z = 0, por tanto no son coplanarios.

Ejercicio 8 : Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,3,2) y B(-2,5,0) y es paralelo a la recta $\begin{cases}x=3-t\\ y=2+t\\ z=-2-3t\end{cases}$

Plano: $\begin{cases}\text{Punto}: A(1,3,2)\\ \text{Vectores}: \begin{cases}AB=(-3,2,-2)\\ v_r(-1,1,-3)\end{cases}\end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2\\ -3 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=0$ ⇒ -4(x–1) -7(y–3) – (z–2) = 0

-4x – 7y – z +27 = 0

<u>Ejercicio 9</u> : Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y es paralelo a: s:** $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(2,-1,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r(3,-1,1) \\ v_s(5,2,-3) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (x – 2) +14(y + 1) +11z = 0

x + 14y + 11z +12 = 0

<u>Ejercicio 10</u> : Dado el plano $\pi\pi\pi\pi$**: 2x – 3y + z = 0 y la recta r:** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$**, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano** π**.**

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r(1,2,-1) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r(1,-1,2) \\ n_\pi(2,-3,1) \end{cases} \end{cases}$ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 5(x – 1) + 3.(y – 2) – (z + 1) = 0

5x + 3y – z – 12 = 0

<u>Ejercicio 11</u> : Sea la recta r: $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ **y el plano ax – y + 4z – 2 = 0**

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.
b) ¿Existe algún valor de a para que r sea perpendicular al plano?

a) Vector director de la recta y vector normal del plano perpendiculares ($v_r.n_\pi = 0$)

$v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 5,2)$ $v_r.n_\pi = (1,5,2).(a,-1,4) = a - 5 + 8 = 0 \Rightarrow a = -3$

b) Vector de la recta y vector normal del plano, paralelos: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{5}{-1} = \dfrac{2}{4}$. No existe.

<u>Ejercicio 12</u> : Dados la recta r: $\begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** π**: x + 2y + 3z – 1 = 0, halla la ecuación de una recta s contenida en el plano** π **que pase por el punto P(2,1,-1) y sea perpendicular a r.**

Recta s: $\begin{cases} \text{Punto}: P(2,1,-1) \\ \text{Vector}: v_s = v_r x n_\pi = \begin{Bmatrix} v_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,1) \\ n_\pi = (1,2,3) \end{Bmatrix} v_r x n_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1,-5,3) \end{cases}$

$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+1}{3}$

Ejercicio 13 : Halla la ecuación de una recta que cumpla las condiciones siguientes:

1) Es paralela a la recta de ecuaciones: r: $\begin{cases} \mathbf{x+2z=5} \\ \mathbf{y+3z=5} \end{cases}$

2) Pasa por el punto de intersección de la recta s con el plano π:

$$\mathbf{s:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{3}} \qquad \mathbf{\pi: x-y+z=7}$$

vr: z = α, x = 5 - 2α, y = 5 - 3α ⇒ $v_r(-2,-3,1)$

$$P_r: s: \begin{cases} x=4t+1 \\ y=2t-3 \Rightarrow 4t+1-(2t-3)+(3t-2)=7 \Rightarrow 5t=5 \Rightarrow t=1 \Rightarrow P_r(5,-1,1) \\ z=3t-2 \end{cases}$$

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$$

Ejercicio 14 : Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,-3,2) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{3x-2y+1=0} \\ \mathbf{2y+3z-3=0} \end{cases}$

$$\text{Plano: } \begin{cases} \text{Punto}: A(1,-3,2) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} AB=(-1,4,-1) \\ v_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(-6,-9,6) \parallel (-2,-3,2) \end{cases} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

5(x – 1) + 4(y + 3) + 11(z – 2) = 0 ⇒ 5x + 4y + 11z – 15 = 0

Ejercicio 15 : Dados los planos mx + 2y – 3z – 1 = 0 y 2x – 4y + 6z + 5 = 0, halla m para que sean: a) Paralelos b) Perpendiculares

a) Proporcionales: $\frac{m}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6} \Rightarrow m=-1$

b) Vectores normales perpendiculares: (m,2,-3).(2,-4,6) = 0 ⇒ 2m – 8 -18 = 0 ⇒ m = 13

Ejercicio 16 : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos B(1,1,1) y C(1,2,1).

$$\text{Recta: } \begin{cases} \text{Punto}: P(1,2,3) \\ \text{Vector}: v_r=n_\pi: \pi \begin{cases} \text{Punto}: O(0,0,0) \\ \text{Vectores}: \begin{cases} OB(1,1,1) \\ OC(1,2,1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+z=0: v_r(-1,0,1) \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

Ejercicio 17 : Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ y es paralelo a s: $\frac{1-x}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-4}$

Plano: $\begin{cases} \text{Punto}: P_r \\ \text{Vectores}: \begin{cases} v_r \\ v_s(-2,3,-4) \end{cases} \end{cases}$

Pasamos r a paramétricas: y = α, x = 1 - α, z = -2 + 2α + α = 3α - 2 $\begin{cases} P_r(1,0,-2) \\ v_r(-1,1,3) \end{cases}$

Plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$ -13(x – 1) -10y – (z + 2) = 0 ⇒ -13x – 10y – z +11 = 0

Ejercicio 18 : Indica qué condiciones deben cumplir a, b, c y d, para que el plano π: ax + by + cz + d = 0 sea:
a) Paralelo al plano OXY **b) Perpendicular al plano OXY**
c) Paralelo al eje Z **d) Perpendicular al eje X**
e) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $n_\pi \parallel n_{oxy}$ $\frac{a}{0}=\frac{b}{0}=\frac{c}{1} \Rightarrow$ a = 0, b = 0

b) $n_\pi . n_{OXY} = 0$ (a,b,c).(0,0,1) = 0 ⇒ c = 0

c) $n_\pi . v_Z = 0$ (a,b,c).(0,0,1) = 0 ⇒ c = 0

d) $n_\pi \parallel v_X$ $\frac{a}{1}=\frac{b}{0}=\frac{c}{0} \Rightarrow$ b = 0, c = 0

e) No es paralelo a ninguno de los ejes, a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0

REPASO PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO

EJERCICIO 1 :

Dados las rectas $r: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3-3\lambda, \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 4x+y+3z-1=0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: 4x+y+z-3=0;$

calcula el ángulo que forman:

a) ***r* y *s*** **b)** ***s* y π**

Solución:

a) Hallamos el vector director de s: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-13,11)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{v_r \cdot v_s}{|v_r|\cdot|v_s|} = \dfrac{(1,-3,2).(-5,-13,11)}{\sqrt{1+9+4}.\sqrt{25+169+121}} \dfrac{-5+39+22}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{315}} = \dfrac{56}{\sqrt{4\,410}} \approx 0{,}843 \quad \to \quad \alpha = 32^o\ 30'\ 45''$

b) $\text{sen}\alpha = \dfrac{|v_s \cdot \vec{n}_\pi|}{|v_s|\cdot|\vec{n}\pi|} = \dfrac{|(-5,-13,11).(4,1,1)}{\sqrt{25+169+121}\sqrt{16+1+1}} \dfrac{|-20-13+11|}{\sqrt{315}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{22}{\sqrt{5\,670}} \approx 0{,}292 \quad \to \alpha = 16^o\ 59'\ 16''$

EJERCICIO 2 : Considera los planos ππππ: 2*x* + *ay* + 4*z* - 1 = 0 y σσσσ: *ax* + 2*y* + 4*z* - 3 = 0.

a) Calcula el ángulo que forman π y σ cuando *a* = 1.

b) Halla *a* para que π y σ sean paralelos.

c) Determina el valor de *a* para que σ y σ sean perpendiculares.

Solución:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$ Un vector normal a π es $\vec{n}_1(2,\ 1,\ 4)$. Un vector normal a σ es $\vec{n}_2(1,\ 2,\ 4)$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{2+2+16}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{20}{21} \approx 0{,}952 \quad \to \quad \alpha = 17^o\ 45'\ 10''$

b) Sus vectores normales han de ser proporcionales: $\dfrac{2}{a} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{4}{4} \quad \to \quad a = 2$

c) Sus vectores normales han de ser perpendiculares: (2,*a*,4)·(*a*,2,4) = 2*a* + 2*a* + 16 = 4*a* + 16 = 0 ⇒ *a* = -4

EJERCICIO 3 : Dados las rectas $r: \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$ **y el punto** $P(1,\ 0,\ -5);$

calcula el ángulo que forma la recta *r* con el plano, π, perpendicular a *s* que pasa por *P*.

Solución: $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}$

- Un vector dirección de *r* es: $\vec{d}_r = (2,\ -3,\ 1)\times(-3,\ 2,\ 2) = (-8,\ -7,\ -5)\ //\ (8,\ 7,\ 5) = \vec{d}$

- Un vector normal al plano π es: $\vec{n} = \vec{d}_s = (-2,\ 1,\ 2)$

$\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{-16+7+10}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0{,}028 \quad \to \alpha = 1^o\ 37'\ 34''$

EJERCICIO 4 : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ **y** $s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \frac{|\,[v_r,\ v_S,\ \overrightarrow{P_rP_S}]\,|}{|\,v_r \times v_S\,|}$

Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

Recta r: Punto: P_r (2,-1,0) Vector: $\vec{v}_r$ (1,3,-2)

Recta s: Punto: P_s (1,0,-1) Vector: $\vec{v}_s$ (1,2,1)

$\overrightarrow{P_rP_S}(-1, 1, -1) \Rightarrow \left[v_r,\ v_S,\ \overrightarrow{P_rP_S}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$

$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7i - 3j - k = (7,-3,-1)$

$\text{dist}(r,\ s) = \frac{|\,[v_r,\ v_S,\ \overrightarrow{P_rP_S}]\,|}{|\,v_r \times v_S\,|} = \frac{|-9|}{\sqrt{49+9+1}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \approx 1{,}17u$

EJERCICIO 5 : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{0}$ **y** $s: \begin{cases} x = -5+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_S},\ v_r,\ v_S]|}{|\ v_r \times v_S|}$

- En la recta r: $P_r(-1,\ 2,\ -1);\ \ v_r(3,\ 4,\ 0)$
- En la recta s: $P_S(-5,\ 2,\ 3);\ \ v_S(1,\ -1,\ 4)$
- $\overrightarrow{P_rP_S}(-4,\ 0,\ 4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rP_S},\ v_r,\ v_S\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$
- $|\,v_r \times v_S| = |(3,\ 4,\ 0) \times (1,\ -1,\ 4)| = |(16,\ -12,\ -7)| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$

Por tanto: $\text{dist}(r,\ s) = \frac{92}{\sqrt{449}} \approx 4{,}34$

EJERCICIO6: Dados el punto $P(2,\ 0,\ -3)$**, la recta** $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x+2y+2z-1=0$**,**

calcula la distancia entre: a) ***P*** **y** π **b)** ***P*** **y** ***r***

Solución:

a) $dist(P,\ \pi) = \frac{|2+0-6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$

b) dist (P,r) = $\frac{|P_rPxv_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector dirección de la recta *r* : $P_r(2,\ -3,\ 2);\ \ v_r(1,\ 1,\ -2)$
- $\left|\overrightarrow{P_rP} \times v_r\right| = |(0,\ 3,\ -5) \times (1,\ 1,\ -2)| = |(-1,\ -5,\ -3)| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$
- $|\,v_r| = |(1,\ 1,\ -2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ $\Rightarrow$ Por tanto: $\text{dist}(P,\ r) = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}} \approx 2{,}42$

<u>EJERCICIO</u> 7: Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, tales que la distancia de *P* a *A* sea igual al triple de la distancia de *P* a *B*, siendo *A* ˜(1, 0, 0) y *B* (1, 0, 0).

Solución:
Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = 3 *dist* (*P*, *B*), es decir:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \Rightarrow (x+1)^2+y^2+z^2 = 9\,[(x-1)^2+y^2+z^2]$$

$$x^2+2x+1+y^2+z^2 = 9\,[x^2-2x+1+y^2+z^2] \Rightarrow 8x^2+8y^2+8z^2-20x+8=0$$

<u>EJERCICIO 8</u> : Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos π: $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ y σ: $4x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Solución: Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, π) □ *dist* (*P*, →), es decir:

$$\frac{|3x-2y+4z-1|}{\sqrt{29}} = \frac{|4x+2y-3z+2|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |3x-2y+4z-1| = |4x+2y-3z+2| \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z-1 = 4x+2y-3z+2 & \rightarrow \quad x+4y-7z+3=0 \\ 3x-2y+4z-1 = -4x-2y+3z-2 & \rightarrow \quad 7x+z+1=0 \end{cases}$$

<u>EJERCICIO 9</u> : Dados los puntos *A* (-1, 0) y *B* (1, 0), halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que el cociente de distancias: $\frac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)}$ sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución: Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{dist}(P,\ A) = \text{dist}(P,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \quad \rightarrow \quad (x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$x^2+2x+1+y^2 = x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow 4x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \Rightarrow$$

Es la ecuación del eje *Y*, que en este caso es la mediatriz del segmento *AB*.

<u>EJERCICIO 10</u> : Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, tales que la distancia de *P* a *A* sea igual al triple de la distancia de *P* a *B*, siendo *A* ˜(1, 0, 0) y *B* (1, 0, 0).

Solución:
Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = 3 *dist* (*P*, *B*), es decir:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \Rightarrow (x+1)^2+y^2+z^2 = 9\,[(x-1)^2+y^2+z^2]$$

$$x^2+2x+1+y^2+z^2 = 9\,[x^2-2x+1+y^2+z^2] \Rightarrow 8x^2+8y^2+8z^2-20x+8=0$$

<u>EJERCICIO 11</u> : Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos π: $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ y σ: $4x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Solución: Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, π) □ *dist* (*P*, →), es decir:

$$\frac{|3x-2y+4z-1|}{\sqrt{29}} = \frac{|4x+2y-3z+2|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |3x-2y+4z-1| = |4x+2y-3z+2| \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z-1 = 4x+2y-3z+2 & \rightarrow \quad x+4y-7z+3=0 \\ 3x-2y+4z-1 = -4x-2y+3z-2 & \rightarrow \quad 7x+z+1=0 \end{cases}$$

<u>EJERCICIO 12</u> : Dados los puntos *A* (-1, 0) y *B* (1, 0), halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que el cociente de distancias: $\frac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)}$ sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución: Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P,\ A)}{\text{dist}(P,\ B)} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{dist}(P,\ A) = \text{dist}(P,\ B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \quad \rightarrow \quad (x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$x^2+2x+1+y^2 = x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow 4x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \Rightarrow$$

Es la ecuación del eje *Y*, que en este caso es la mediatriz del segmento *AB*.

<u>EJERCICIO 13</u>
a) Calcula el valor de *m* para que los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2), *R*(3, 1, -1) y *S*(*m*, 2, 1) sean coplanarios, y escribe la ecuación del plano que los contiene.
b) Obtén un punto simétrico de *A*(1, -1, 1) respecto del plano anterior.

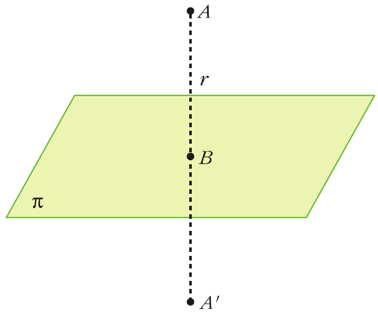
Solución:
a) Escribimos la ecuación del plano, π, que contiene a los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2) y *R*(3, 1, -1):

$$P(1,2,-1),\ \overrightarrow{PQ}(-1,-3,3),\ \overrightarrow{PR}(2,-1,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1)+6(y-2)+7(z+1)=0$$

$$3x + 6y + 7z - 8 = 0$$

Hallamos el valor de *m* para que *S*(*m*, 2, 1) $\in \pi$: $3m + 12 + 7 - 8 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-11}{3}$

b) (1) Obtenemos la recta, *r*, que pasa por *A* y es perpendicular a π: $r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1+6\lambda \\ z = 1+7\lambda \end{cases}$



(2) Buscamos el punto, *B*, de intersección de *r* y π:
$3(1 + 3\lambda) + 6(-1 + 6\lambda) + 7(1 + 7\lambda) - 8 = 0$

$$94\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{94} = \frac{2}{47} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$$

(3) Si *A*'(*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *A* respecto de A´, *B* es el punto medio de *AA*': $\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y-1}{2}, \dfrac{z+1}{2}\right) = \left(\dfrac{53}{47}, \dfrac{-35}{47}, \dfrac{61}{47}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{53}{47} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{59}{47} \\[2ex] \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{-35}{47} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{-23}{47} \\[2ex] \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{61}{47} \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{75}{47} \end{array}\right\} \rightarrow A'\left(\frac{59}{47}, \frac{-23}{47}, \frac{75}{47}\right)$$

<u>EJERCICIO 14</u> : Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$\boldsymbol{r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}} \qquad \textbf{y} \qquad \boldsymbol{s : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}}$$

Solución:

- Un punto genérico de *r* es *R*(-1 + μ, 2 + 2μ, 3 - μ).
- Un punto genérico de *s* es *S*(1 + λ, -2 + λ, 3 + λ).

Un vector genérico de origen en *r* y extremo en *s* es: $\overrightarrow{RS}(\lambda - \mu,\ \lambda - 2\mu - 4,\ \lambda + \mu)$
Este vector debe ser perpendicular a *r* y a *s*:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = \overrightarrow{RS} \cdot (1, 2, -1) = 0 \quad \rightarrow \quad 2\lambda - 6\mu - 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = \overrightarrow{RS} \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda - 2\mu - 4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{4}{7} \\[2ex] \mu = \dfrac{-8}{7} \end{array}$$

$$\text{Así}:\ R\left(\frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{29}{7}\right);\ S\left(\frac{-3}{7}, \frac{-10}{7}, \frac{25}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{RS}\left(\frac{12}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-4}{7}\right) // (3, -2, -1)$$

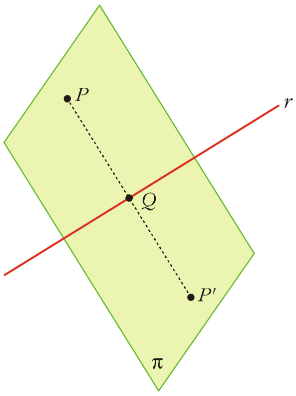
Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $P: \begin{cases} x = \dfrac{-15}{7} + 3\lambda \\ y = \dfrac{-2}{7} - 2\lambda \\ z = \dfrac{29}{7} - \lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 15</u> : Averigua las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, 4, -1) respecto de la recta $r: \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$; **y calcula la distancia de *P* a *r*.**

Solución:

(1) Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$n_\pi = v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-4,-7) \parallel (1,4,7) \Rightarrow x + 4y + 7z + D = 0 \Rightarrow 3 + 16 - 7 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$



$\pi: x + 4y + 7z - 12 = 0$

(2) Resolvemos el sistema entre la recta y el plano (Para ello pasamos la recta a paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ x = \dfrac{6+8\alpha}{7} - \alpha = \dfrac{6+\alpha}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+\alpha}{7} \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\frac{6+\alpha}{7} + \frac{12+16\alpha}{7} + 7\alpha - 12 = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 12 + 16\alpha + 49\alpha - 84 = 0 \Rightarrow \alpha = 66/66 = 1$$

Q(1,1,1)

(3) Si llamamos $P'(x, y, z)$ al simétrico de P, entonces Q es el punto medio de PP':

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} = 1 \;\rightarrow\; x = -1 \\ \dfrac{y+4}{2} = 1 \;\rightarrow\; y = -2 \\ \dfrac{z-1}{2} = 1 \;\rightarrow\; z = 3 \end{array}\right\} P'(-1, -2, 3)$$

- La distancia de P a r es igual a la distancia de P a Q:

$$dist(P, r) = dist(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|(-2, -3, 2)\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$$

<u>EJERCICIO 16</u> :

a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ **y es perpendicular al plano π: $2x + y + z - 2 = 0$.**

b) Calcula el ángulo que forman la recta *r* y el plano π.

Solución:

a) Necesitamos un punto y dos vectores: $P_r(1,-2,0)$, $v_r(3,-1,1)$, $n_\pi(2,1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1) - (y+2) + 5z = 0 \Rightarrow -2x - y + 5z = 0$$

b) $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \dfrac{(3,-1,1).(2,1,1)}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+1+1}} \dfrac{6-1+1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{66}} \to \alpha = 47^{o}\ 36'\ 29''$

<u>EJERCICIO 17</u> : Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*, y calcula la mínima distancia entre ellas: $r: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1+6\lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{3}$

Solución:

a) Posición relativa: Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1+6\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = -2 \\ z = -1+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (Paralelas o se cruzan)}$$

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(2,0,6)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow$ Proporcionales $\Rightarrow$ Son paralelas.

b) Como son paralelas d(r,s) = d(P_r,s) = $\dfrac{|P_rP_s x v_s|}{|v_s|}$

$P_r(2,3,-1)$, $P_s(6,-2,-1)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow P_rP_s = (4,-5,0)$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times v_s|}{|v_s|} = \frac{|(4,-5,\ 0)\times(1,\ 0,\ 3)|}{|(1,\ 0,\ 3)|} = \frac{|(-15,-12,5)|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{394}}{\sqrt{10}} \approx 6{,}28$$

<u>EJERCICIO 18</u> : El plano $\pi\pi\pi\pi$: 2*x* + *y* + 4*z* + 8 = 0 corta a los ejes coordenados en tres puntos; *A*, *B* y *C*. Halla el área del triángulo con vértices en esos tres puntos.

Solución:

Obtenemos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados:

- Con el eje X : $y = z = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$ Punto A (-4, 0, 0)
- Con el eje Y : $x = z = 0 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow$ Punto B (0, -8, 0)
- Con el eje Z : $x = y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow$ Punto C (0, 0, -2)

$\overrightarrow{AB}(4,-8,0)$; $\overrightarrow{AC}(4,0,-2)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(16,\ 8,\ 32)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+8^2+32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1\,344} \approx 18{,}33\ u^2$$

<u>EJERCICIO 19</u> :

a) Escribe la ecuación del plano, π, que pasa por los puntos *P* (2, 1, -1), *Q* (1, 0, 3) y *R* (-3, 1, 1).
b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) Necesitamos un punto P(2,1,-1) y dos vectores PQ(-1,-1,4), PR(-5,0,2)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2)-18(y-1)-5(z+1) = 0 \Rightarrow -2x-18y-5z+17 = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de con los ejes coordenados:

$$-\text{Con el eje } X \to y = z = 0 \to x = \frac{17}{2} \to \text{Punto } A\left(\frac{17}{2},\ 0,\ 0\right)$$

$$-\text{Con el eje } Y \to x = z = 0 \to y = \frac{17}{18} \to \text{Punto } B\left(0,\ \frac{17}{18},\ 0\right)$$

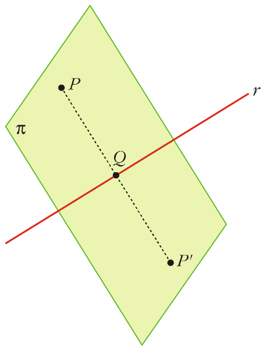
$$-\text{Con el eje } Z \to x = y = 0 \to z = \frac{17}{5} \to \text{Punto } C\left(0,\ 0,\ \frac{17}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{17}{2},\ \frac{17}{18},\ 0\right);\ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{17}{2},\ 0,\ \frac{17}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{289}{90}, \frac{289}{10}, \frac{289}{36}\right)\right| \approx 15{,}08 \text{ u}^2$$

<u>EJERCICIO 20</u> : Halla el punto simétrico de $P(-2, 1, 5)$ respecto a la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación del plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r :
x – 2y + z + D = 0 ⇒ -2 -2 + 5 + D = 0 ⇒ D = -1 ⇒ x – 2y + z – 1 = 0

[2] Hallamos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (2+\lambda) - 2(-3-2\lambda) + (1+\lambda) - 1 = 0 \\ 2+\lambda+6+4\lambda+1+\lambda-1 = 0 \\ 6\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{array} \qquad \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

[3] El punto Q es el punto medio de PP', siendo P' el simétrico de P respecto a r : Si $P'(x, y, z)$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{10}{3} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{-1}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-5}{3} \\ \frac{z+5}{2} = \frac{-1}{3} \quad \rightarrow \quad z = \frac{-17}{3} \end{array}\right\} P'\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-17}{3}\right)$$

<u>EJERCICIO 21</u> : Determina la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2};$$ **y halla la ecuación de la perpendicular común.**

Solución:

- Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = -2+3\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 36 \end{array}\right)$$

Rango A = 2 ≠ Rango A^* = 3 ⇒ Sistema incompatible ⇒ Se cruzan o son paralelas

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r$ (-1,2,1) $\vec{v}_s$(3,1,2) ⇒ No son proporcionales ⇒ SE CRUZAN

- Perpendicular común:

Un punto genérico de r es $P_r(2 - \lambda, 3 + 2\lambda, -1 + \lambda)$.

Un punto genérico de s es $P_s(-2 + 3\alpha, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha)$

El vector $P_rP_s = (-4 + 3\alpha + \lambda, -2 + \alpha - 2\lambda, 2 + 2\alpha - \lambda)$ es perpendicular a v_r y a v_s :

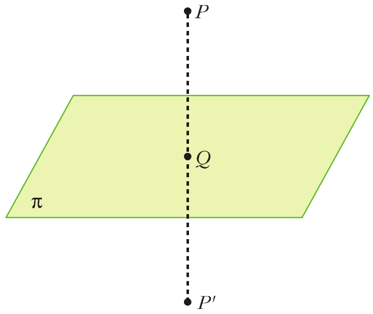
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 0 \quad \rightarrow \quad -6\lambda + \mu + 2 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda + 14\mu - 10 = 0 \end{array}\right\} \lambda = \frac{38}{83};\ \mu = \frac{62}{83}$$

$$\text{Así}: P_r\left(\frac{128}{83}, \frac{325}{83}, \frac{-45}{83}\right);\ P_s\left(\frac{20}{83}, \frac{145}{83}, \frac{207}{83}\right) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}\left(\frac{-108}{83}, \frac{-180}{83}, \frac{252}{83}\right) \;//\; (3, 5, -7)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $p:\begin{cases} x=\dfrac{128}{83}+3\lambda \\ y=\dfrac{325}{83}+5\lambda \\ z=\dfrac{-45}{83}-7\lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 22</u> : Obtén el punto simétrico de *P* (2, -1, 3) respecto al plano ππππ: 3*x* + 2*y* + *z* - 5 = 0.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación de la recta, *r*, que pasa por *P* y es perpendicular a π: $r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$

[2] Obtenemos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:

3 (2 + 3λ) + 2(-1 + λ) + (3 + λ) – 5 = 0 ⇒

$6+9\lambda-2+4\lambda+3+\lambda-5=0 \quad\rightarrow\quad 14\lambda+2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=-\dfrac{1}{7} \Rightarrow$

$Q\left(\dfrac{11}{7},-\dfrac{9}{7},\dfrac{20}{7}\right)$

[3] Si llamamos *P '* al simétrico de *P* respecto de π, *Q* es el punto medio de *PP'*:*P'* (*x*, *y*, *z*)

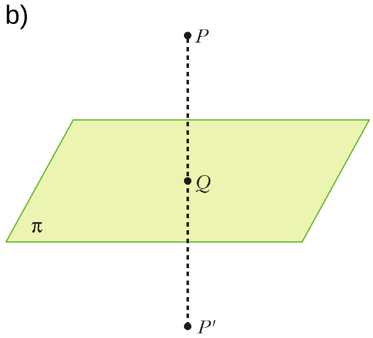
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{11}{7} \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{8}{7} \\ \dfrac{y-1}{2}=-\dfrac{9}{7} \quad\rightarrow\quad y=-\dfrac{11}{7} \\ \dfrac{z+3}{2}=\dfrac{20}{7} \quad\rightarrow\quad z=\dfrac{19}{7} \end{array}\right\} P'\left(\dfrac{8}{7},-\dfrac{11}{7},\dfrac{19}{7}\right)$$

<u>EJERCICIO 23</u> : Dados el punto *P* (3, 1, -1) y el plano ππππ: 3*x* - *y* - *z* = 2, calcula:
a) La ecuación de la recta que pasa por *P* y es perpendicular a π.
b) El punto simétrico de *P* respecto a π.
c) Ecuación del plano que pasa por *P* y es paralelo a π.

Solución:

a) $r:\begin{cases} x=3+3\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$

b)



[1] Apartado a)

[2] Hallamos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:

3 (3 + 3λ) - (1 - λ) -(-1 - λ) = 2 ⇒ 9 + 9λ - 1 + λ + 1 + λ = 2 ⇒

$11\lambda=-7 \quad\rightarrow\quad \lambda=-\dfrac{7}{11} \Rightarrow Q\left(\dfrac{12}{11},\dfrac{18}{11},\dfrac{-4}{11}\right)$

[3] Si *P'* (*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *P* respecto a □, *Q* es el punto medio de *PP'*:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{12}{11} \rightarrow x=-\dfrac{9}{11} \\ \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{18}{11} \rightarrow y=\dfrac{25}{11} \\ \dfrac{z-1}{2}=\dfrac{-4}{11} \rightarrow z=\dfrac{3}{11} \end{array}\right\} P'\left(\dfrac{-9}{11}, \dfrac{25}{11}, \dfrac{3}{11}\right)$$

c) Un plano paralelo a π es de la forma $3x - y - z + D = 0$

Como pasa por P(3, 1, -1) $\Rightarrow 9 - 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -9 \Rightarrow 3x - y - z - 9 = 0$

<u>EJERCICIO 24</u> : Dadas las rectas: $\mathbf{r: \begin{cases} x - az = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}}$ **y** $\mathbf{s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{b} = \dfrac{z}{1},}$

calcula *a* y *b* para que sean ortogonales y coplanarias.

Solución:

Escribimos la recta *r* en paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad P_r(2, -3, 0);\ dv_r(a, 1, 1)$ $\quad P_s(1, -1, 0);\ dv_s(2, b, 1)$

- Para que sean ortogonales, ha de ser: $v_r \cdot v_s = 0 \rightarrow 2a + b + 1 = 0$

- Para que sean coplanarias: $\left[\overrightarrow{P_rP_s}, v_r, v_s\right] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = -2a + b + 3 = 0$

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} 2a + b + 1 = 0 \\ -2a + b + 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \end{array}$

<u>EJERCICIO 25</u> : Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta
$\mathbf{r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}}$ **y otro sobre** $\mathbf{s: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z}{-2}}$ **Calcula el área del cuadrado.**

Solución:

$v_r = (1, -2, -1)$ // $v_s = (2, -4, -2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre *r* y *s*.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P_r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times dv_s\right|}{|v_s|} = \frac{|(-10, -4, -2)|}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, $\text{Área} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\ u^2$

<u>EJERCICIO 26</u> : Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por *P*(2, 0, 1) y corta perpendicularmente a la recta $\mathbf{r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}}$**.**

Solución:

[1] Hallamos el plano, π, perpendicular a r que pasa por P: $2x - y + 2z + D = 0 \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6$
$2x - y + 2z - 6 = 0$

[2] Hallamos el punto Q de intersección entre r y π: $2(2\alpha + 2) - (-\alpha+1) + 2(2\alpha) - 6 = 0 \Rightarrow 9\alpha - 3 = 0 \Rightarrow$
$\alpha = 1/3 \Rightarrow$ Q ($\left(\dfrac{2}{3} + 2, -\dfrac{1}{3} + 1, \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO

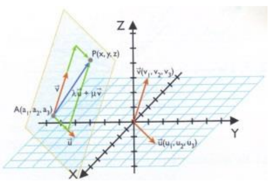
Conocido un punto A(a_1,a_2,a_3) y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

ECUACIÓN DE LA RECTA	
Ecuación vectorial	$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ con $t \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2; \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$
Ecuación continua	$\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$
Ecuaciones implícitas	$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$

Dos puntos distintos de R^3 determinan una recta y sólo una que los contiene.
Se toma uno de los puntos A o B, y, como vector director, el vector $\overrightarrow{AB}$.
Paso de una ecuación a otra. Para pasar de una ecuación a otra hay que hallar un punto y un vector director. Si nos dan las ecuaciones implícitas, se resuelve el sistema y se hallan dos soluciones particulares.
Incidencia entre punto y recta. Un punto está en una recta si verifica su ecuación.

ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO.

Conocido un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ **y dos vectores directores** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ **y** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$



ECUACIÓN DEL PLANO	
Ecuación vectorial	$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
Ecuación general o implícita	$Ax + By + Cz + D = 0$

Conocidos tres puntos no alineados $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$

Tres puntos no alineados de $\mathbb{R}^3$ determinan un plano y sólo uno que los contiene

Se toman un punto A,B y C y dos vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Conocido un punto $P(a_1, a_2, a_3)$ **y un vector normal al plano** $\vec{n} = (A, B, C)$

Un vector normal a un plano es un vector perpendicular a dicho plano. Realizando el producto vectorial de los vectores directores obtenemos un vector normal al plano

Ecuación general: $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A,B y C son las coordenadas del vector normal y D se calcula imponiendo que pase por P.

También podemos hacer lo siguiente: Se toma el punto y se eligen dos vectores perpendiculares al vector normal (mediante el producto escalar, imponemos que ese producto sea 0) e independiente entre sí, de esta forma, esos vectores serán vectores directores del plano.

POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO

Posición relativa de dos rectas en el espacio.
Conocido un punto y un vector director de cada una de las rectas:
r: A(a_1,a_2,a_3) y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
s: B(b_1,b_2,b_3) y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

para estudiar la posición relativa de las dos rectas r y s, se estudia la dependencia lineal de los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3),\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

que es lo mismo que estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

RANGO	POSICIÓN
1	Las dos rectas son **coincidentes**
2	Sí Las coordenadas de los vectores directores son proporcionales. $\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$ Las rectas son **paralelas**
	Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. $\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$ Las rectas son **secantes**
3	Las rectas **se cruzan**

Posición relativa de una recta y un plano en el espacio

Supuesto conocido los siguientes datos de la recta r y del plano π:

Punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de la recta y $\vec{n}=(A,B,C)$ un vector normal del plano

para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se calcula el producto escalar $\vec{v}\cdot\vec{n}$.

VALOR DE $\vec{v}\cdot\vec{n}$.	POSICIÓN
Sí $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$	Si A cumple las ecuaciones del plano: **La recta está contenida en el plano.**
	Si A cumple las ecuaciones del plano: **La recta es paralela al plano.**
Sí $\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$	**La recta y el plano son secantes.** Hallamos punto de corte

Posición relativa de dos planos en el espacio.

Dados los planos $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi': A'x+B'y+C'z+D'=0$ <u>pueden darse tres casos:</u>

CONDICIÓN	POSICIÓN
$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	**Los planos son coincidentes**
$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	**Los planos son paralelos**
$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'}$	**Los planos son secantes. Se cortan en una recta.** Las ecuaciones implícitas de una recta representan la intersección de dos planos.

Posición relativa de tres planos en el espacio.

Para determinar la posición relativa de tres planos en el espacio estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos

RANGO M	RANGO M'	TIPO	POSICIÓN
3	3	S.C.D.	Los tres planos **se cortan en un punto**.
2	3	S.I.	Ninguno de los planos es paralelo a otro. Los tres planos **se cortan dos a dos** formando una superficie prismática.
			Dos planos son paralelos y el otro los corta.
	2	S.C.I.	Los tres planos **no son coincidentes y se cortan en una recta**. Pertenecen a un haz de planos.
			Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.
1	2	S.I.	**Los tres planos son paralelos y distintos dos a dos.** Pertenecen a un haz de planos.
			Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo a ellos y distinto.
	1	S.C.I.	**Los tres planos son coincidentes.**

HAZ DE PLANOS PARALELOS.

<u>Haz de planos paralelos.</u>

Si nos dan un plano de ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ los planos paralelos al mismo son de la forma: $Ax+By+Cz+k=0$, $k\in\mathbb{R}$ ya que todos ellos tienen el mismo vector normal $\vec{n}=(A,B,C)$.

Se llama **haz de planos paralelos** al conjunto de planos paralelos a uno dado.

El haz de planos queda determinado por un plano cualquiera del mismo.

Su ecuación es: $Ax+By+Cz+k=0$, $k\in\mathbb{R}$

<u>Haz de planos secantes</u>

Se llama **haz de planos secantes** al conjunto de planos que pasan por una recta que se llama <u>*arista del haz*</u>.

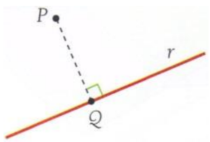
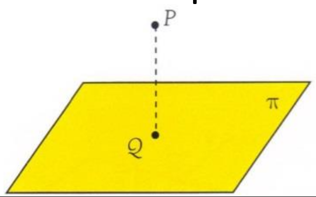
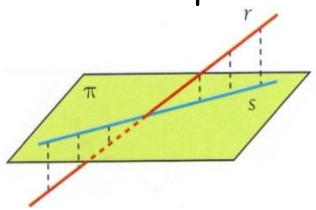
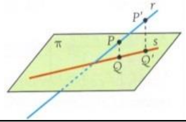
El haz queda determinado por dos planos distintos del mismo. Su ecuación es:

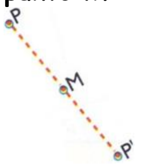
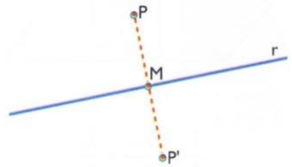
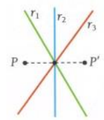
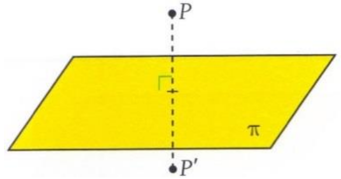
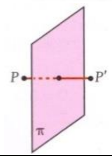
$$t(Ax+By+Cz+D)+s(A'x+B'y+C'z+D')=0,\ t,s\in\mathbb{R}$$

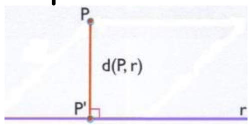
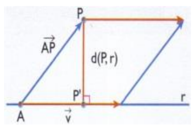
Resumen Unidad 10.
Ecuaciones de rectas y planos en el espacio.
MATEMÁTICAS II 2 BTO A

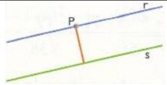
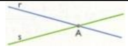
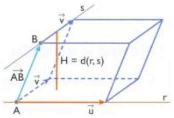
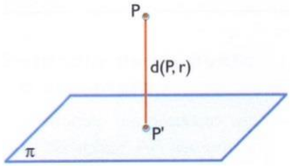
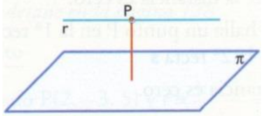
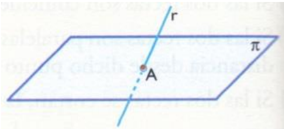
I.E.S. El Sur

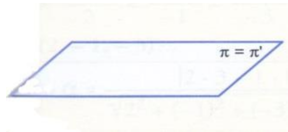
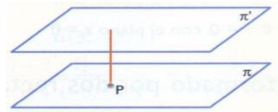
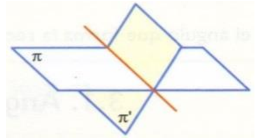
RESUMEN UNIDAD 11. ESPACIO MÉTRICO. MATEMÁTICAS II

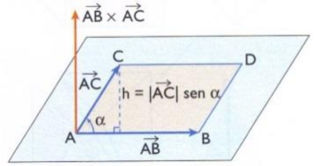
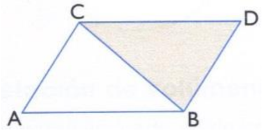
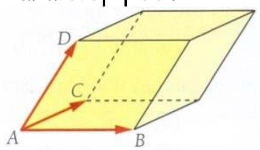
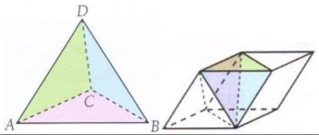
PROYECCIONES ORTOGONALES	PASOS A SEGUIR
Punto P sobre recta r 	1. Se halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P. 2. La p.o. será Q: el punto de corte de la recta y plano. (sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas)
Punto P sobre plano π 	1. Calculamos recta perpendicular al plano (el vector director de la recta será el normal al plano) que pasa por P. 2. Q: Punto de corte de la recta calculada con el plano π.
Recta r sobre plano π 	1. Hallamos el vector director de r, el vector normal al plano y un punto de la recta. 2. Calculamos el plano π' que pasa por P y tiene como vectores directores el director de la recta y el normal al plano. 3. Q: punto de corte de los planos π y π′ También se puede calcular escogiendo dos puntos de la recta, calculando su proyección ortogonal sobre el plano y, posteriormente, hallando la recta que pasa por las proyecciones. 

PUNTOS SIMÉTRICOS	PASOS A SEGUIR
De un punto P respecto de otro punto M 	El simétrico del punto respecto del punto es el punto tal que es el punto medio del segmento. Calculamos el punto medio de PP′ e imponemos que se a igual a M.
De un punto P respecto de una recta r  	1. Hallamos la p.o. de P sobre r, que será el punto M. 2. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección M. Dados dos puntos, P y P′ , existe una recta respecto de la cual son simétricos. Esa recta pasa por el punto medio del segmento PP′ y es perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$. Hay infinitas rectas respecto de las cuales dos puntos fijados son simétricos.
De un punto respecto de un plano π  	1. Hallamos la p.o., M, del punto p sobre el plano π. 2. Calculamos el simétrico de P respecto de la proyección M. Dados dos puntos, P y P′, existe un único plano π respecto del cual son simétricos. Ese plano contiene al punto medio del segmento PP′ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{PP'}$

DISTANCIAS	PASOS A SEGUIR
Entre los dos puntos A y B	$A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ $d(A,B)=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
De punto P a una recta r  	La distancia de un punto P a una recta r es igual a la distancia entre el punto P y su p.o. P′. 1. Hallamos p.o. de P sobre r. 2. Calculamos la distancia entre P y su p.o. Utilizando las aplicaciones del producto vectorial: $d(P,r)=\dfrac{\lvert\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert}$ Siendo A un punto cualquiera de r, y v el vector director de r.

Distancia entre dos rectas r y s. (Primero se calcula la posición relativa de las dos rectas)	 Coincidentes	$d(r,s)=0$
	 Paralelas	Se halla un punto P en la 1ª recta y se calcula: $d(r,s)=d(P,s)$
	 Se cortan	$d(r,s)=0$
	 Se cruzan	$d(r,s)=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right\|}{\|\vec{u}\ x\ \vec{v}\|}$
Distancia de un punto P a un plano π. 	La distancia de un punto P a un plano π es la distancia de p a su p.o. sobre π. La distancia del punto $P(p_1,p_2,p_3)$ al plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por: $d(P,\pi)=\dfrac{\|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Distancia entre una recta r y un plano π. Se calcula la posición relativa, teniendo en cuenta que: • Si $\vec{n}.\vec{v}\neq 0$ se cortan. • Si $\vec{n}.\vec{v}=0$ son paralelos o la recta está contenida en el plano	Si r contenida en π 	$d(r,\pi)=0$
	Si r paralela a π 	$d(r,\pi)=d(P,\pi)$ siendo P un punto cualquiera de r
	Si r corta a π 	$d(r,\pi)=0$

Distancia entre dos planos	Coincidentes 	$d(\pi,\pi')=0$
	Paralelos 	$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$ $d(\pi,\pi')=\dfrac{\|D-D'\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
	Se cortan 	$d(\pi,\pi')=0$

ÁREAS	FÓRMULAS
Paralelogramo 	$ÁREA=\left\|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\right\|$
Triángulo 	$ÁREA=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\right\|$
VOLUMENES	**FÓRMULAS**
Paralelepípedo 	$VOLUMEN=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right\|$
	$VOLUMEN=\dfrac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right\|$