

SLIDE 2 – 4

Si considera la **variazione dell'angolo** di tiro anche rispetto alla **direzione verticale**.

Questo approccio permette di analizzare con gli studenti come la scelta di modificare il modello iniziale porti a delle soluzioni che, pur coerenti con quelle trovate in precedenza, **sono più generali**.

In questo caso la notazione diventa ancora più pesante che in precedenza: si consiglia di affrontare il percorso sottolineando le differenze e le similitudini con le soluzioni trovate in precedenza, **concentrandosi sul processo e non sulla procedura**.

Bisogna notare come, nella SLIDE 3, anche il valore  $y=0$  sia uno **zero della tangente**; tuttavia questo corrisponde ad un **punto di minimo** (come si poteva intuire da valutazioni legate alla situazione realistica).

UN APPROCCIO ALGEBRICO

Problema: occorre trovare l'angolo  $\alpha'$  non sul piano orizzontale, ma sul piano che passa per E e per A' e B'.

- Per trovare  $\gamma$  utilizzo la formula:  

$$\tan \gamma' = \frac{x_p' - \frac{p}{2}}{y'} = \frac{x_p - \frac{p}{2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$
- Per trovare  $\beta$ : in modo analogo:  

$$\tan \beta' = \frac{x_p' + \frac{p}{2}}{y'} = \frac{x_p + \frac{p}{2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$
- Tramite le formule trigonometriche otteniamo che:  

$$\tan \alpha' = \frac{p\sqrt{y^2 + h^2}}{y^2 + h^2 + x_p^2 - \frac{p^2}{4}}$$

UN APPROCCIO ALGEBRICO

Come prima, per trovare l'angolo massimo  $\alpha'$ , troviamo il massimo di  $\tan \alpha'$ :

$$f(y) = \frac{p\sqrt{y^2 + h^2}}{y^2 + h^2 + x_p^2 - \frac{p^2}{4}}$$

- Calcoliamo la derivata prima:  

$$f'(y) = \frac{p\sqrt{y^2 + h^2} - y^2 - h^2 - \frac{p^2}{4}}{\sqrt{y^2 + h^2}(y^2 + h^2 + x_p^2 - \frac{p^2}{4})^2}$$
- I valori di  $y$  che rendono nulla la derivata prima sono tali che:  

$$y^2 = x^2 - h^2 - \frac{p^2}{4}$$

UN APPROCCIO ALGEBRICO

Si tratta di un'iperbole  $x^2 - y^2 = \frac{p^2}{4} + h^2$  che possiamo scrivere come:

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{4} + h^2} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{4} + h^2} = 1$$

- E' un'iperbole equilatera con asintoti  $y = \pm x$
- Interseca l'asse delle  $x$  nei punti  $(0, \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + h^2})$

Osservazione:  $h$  si trova sull'asse  $z$ , ma entra nell'equazione dell'iperbole sul piano  $xOy$ . Quindi, a seconda dell'altezza  $h$  a cui si vuole che il palloni superi la porta, la posizione ottimale per calciare si trova sull'iperbole corrispondente ad  $h$ .