Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Черкаської облдержадміністрації
Черкаське територіальне відділення
Малої академії наук України

Відділення: Математики
Секція: Математичне моделювання

Побудова та дослідження кіл (кругів Мальфатті) за допомогою програми GeoGebra

Роботу виконав:
Дивнич Максим Васильович,
учень 11 класу
Ковтунівського навчально-виховного комплексу «загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад» Золотоніської районної ради Черкаської області

Науковий керівник:
Малий Іван Володимирович,
учитель математики
Ковтунівського навчально-виховного комплексу «загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад» Золотоніської районної ради Черкаської області

Черкаси – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Задача про вписані кола в трикутник є однією із задач, які мають велику історію в зв’язку з тим, що пошуки розв’язків велися тривалий час багатьма математиками. Наукові дискусії, які розгорталися в ході роботи над задачею заслуговують на особливу увагу, оскільки дають змогу не лише відшукати «найідеальніший» розв’язок, а й виявити причину того, що задача не була розв’язана вчасно. Наявні сучасні комп’ютерні програми дають змогу значно спростити пошук розв’язків та сприяють появі нових математичних гіпотез.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи було створення динамічних моделей, пов’язаних з колами (кругами) Мальфатті**.**

Для досягнення поставленої мети вирішувались наступні завдання:

Опрацювати наявний матеріал (теоретичний, демонстраційний) щодо проблеми Мальфатті.

Навчитися працювати з GeoGebra, яка полегшує створення математичних моделей, які дозволяють проводити інтерактивні дослідження при переміщенні об'єктів і зміні параметрів.

Побудувати різноманітні моделі, що демонструють залежність між елементами в колах (кругах) Мальфаті.

Об’єкт дослідження: Кола (круги) Мальфатті

Предмет дослідження: Побудова кіл, розміщення точок у трикутнику, співвідношення площ побудованих фігур.

Методи дослідження: теоретичний, порівняння та аналіз графічних даних.

Наукова новизна дослідження: створено динамічні моделі, що наочно демонструють побудову кіл Мальфатті за допомогою програми Geogebra, показано розміщення точок Адзіми-Мальфаті

Практичне значення одержаних результатів: побудовані моделі дають можливість демонструвати роботу з програмою Geogebra, вести пошук закономірностей у розміщенні елементів трикутника, встановлювати зв’язки між їх метричними мірами.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історична довідка.

У 1803 році італійський математик Джанфранческо Мальфатті (1731-1807) в журналі «Memorie di matematica e di fisica della Societa Italiana delle scienze», т. X, p. 1, Модена, 1803, стр. 235-244) опублікував задачу, яка зводилась до розміщення в даному трикутнику трьох кругів максимальної площі. Він вважав, що необхідний максимум досягається в конструкції, наведеній на зображенні.

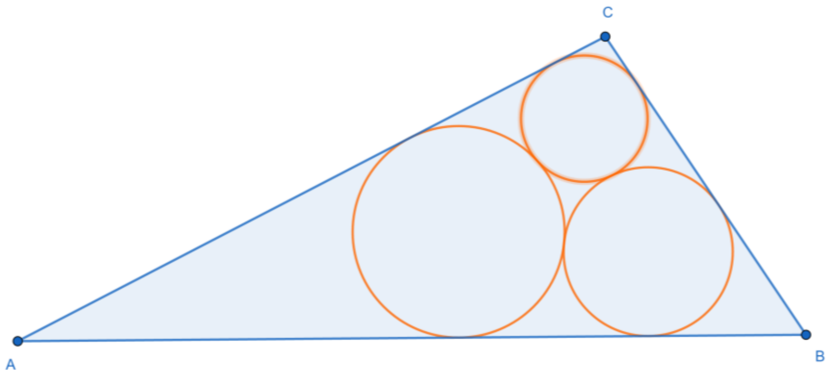


Рис.1

Мальфатті отримав розв'язки, використовуючи методи аналітичної геометрії. Зокрема, професор Університету Феррари розрахував координати центрів кіл, отриманих в результаті їх побудови. Проте він не навів способу виведення формул, зазначивши лише, що розв'язання є довгим і непростим.[1]

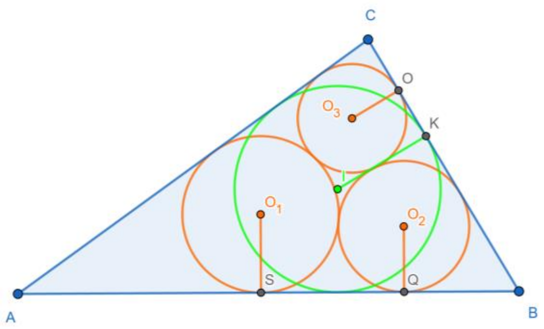
Робота Мальфатті певний час була непомічена. Інтерес до неї виник після того як відомий французький математик Жозеф Жергонн (1771-1859) у 1810 році у своєму журналі запропонував для читачів задачу про вписані кола. Але він лише поставив проблему про дотичні кола, а не задачу про знаходження максимальної площі кругів. Поява задачі у відомому журналі викликала значний інтерес у багатьох геометрів. Кола, які потрібно було побудувати, стали називатись колами Мальфатті.

Цікавий історичний нарис про пошуки розв'язку задачі навів російський математик Микола Агрономов у науково-популярному журналі «Ве́стник о́пытной фи́зики и элемента́рной матема́тики» у 1907 році.[14] У роботі Агромонова мова йде про наукову дискусію щодо задачі Мальфатті, якій сприяв журнал «Annales de

Gergonne», де було опубліковано декілька розв’язків задачі. Найбільш широко узагальнив задачу знаменитий швейцарський математик Якоб Штейнер (1796-1863). Саме він дав свою відому побудову трьох вписаних кіл в трикутник. Але побудова не містила обґрунтувань, що породило чергові наукові дослідження. Появились роботи Келі, Клебша, Каталана, Шретера, Адамса та інших математиків.[1,4,5,14]

Для справедливості слід зазначити, що задачу про вписані кола у трикутник розглядали задовго до Мальфатті. Зокрема японським математиком XVIII століття Адзімою Наонобу (1732-1798) вівся пошук радіуса кола, вписаного в трикутник, в який вже вписано три кола по способу Мальфатті. Через рік після смерті Адзіми один з його студентів Кусака Макото підготував до публікації (але так і не опублікував) колекцію робіт Адзіми, що містить «Завдання Мальфатті». [4,10,18]

Отримана формула вражає своїм естетичним виглядом:



$$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Рис.2

У формулі r – радіус кола вписаного в трикутник, а r_1, r_2 і r_3 – радіуси кіл Мальфатті.

На сьогодні відомо, що задача розглядалася також у манускрипті 1384 року, написаному Монтепунчіано. Манускрипт знаходиться в Муніципальній бібліотеці в італійській Сієні [1]

1.2. Побудова кіл Мальфатті способом Штейнера.

У 1826 році Якоб Штейнер опублікував також без доведення наступну побудову кіл Мальфатті.

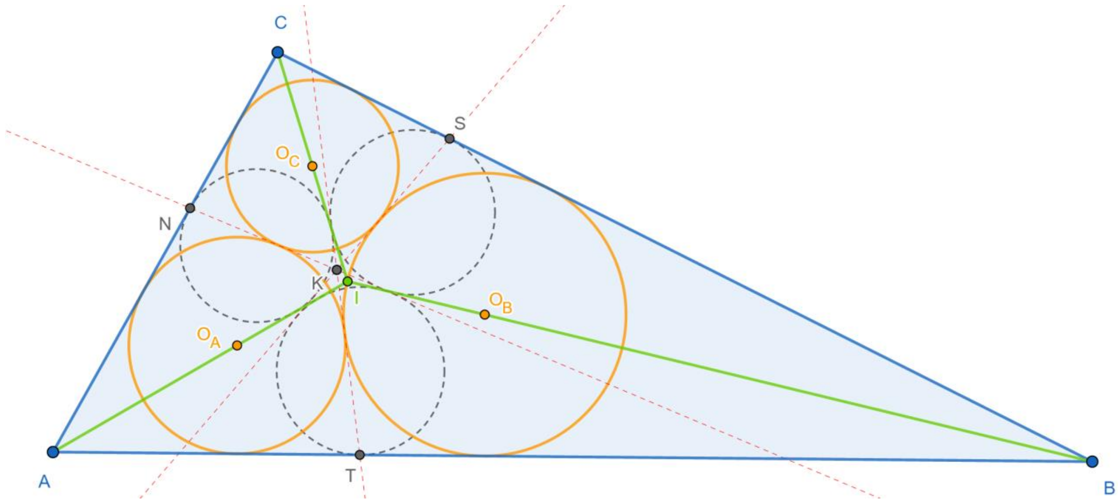


Рис.3

Центр кола, що дотикається двох сторін трикутника, повинен лежати на одній з бісектрис трикутника (зелені відрізки на малюнку). Ці бісектриси ділять трикутник на три менших трикутники. Побудова кіл Мальфатті починається з побудови допоміжних трьох кіл (показаних на малюнку пунктиром), вписаних в ці три трикутники. Кожна пара допоміжних кіл має дві внутрішні дотичні. Одна з цих дотичних є бісектрисою, а друга показана на малюнку червоним пунктиром.

Нехай точки T, S і N – точки перетину дотичних із сторонами трикутника, а точка К є точкою перетину внутрішніх дотичних до допоміжних кіл.

Тоді три кола Мальфатті - це вписані кола трьох чотирикутників ATKN, BTKS і CNKS. [1,2,3,4,5,14]

Повне доведення методу Штейнера було вперше опубліковано Шретером в1874 році. Його можна знайти в підручнику Адамара «Елементарна геометрія». Але це доведення досить складне і не елементарне. Зокрема, воно використовує інверсію. У книзі Шклярського, Ченцова та Яглома «Вибрані завдання і теореми математики» наводиться елементарне, але теж досить складне доведення методу Штейнера. [5]

1.3. Властивості кіл Мальфатті

1.3.1. Перша точка Адзіми-Мальфатті

Нехай *кA, кB, кC* є колами Мальфатті, які вписані в кути A, B, C відповідно. Позначимо через A_1 – точку дотику кіл *кB* і *кC*. B_1– точку дотику кіл *кA* і *кC*. C_1– точку дотику кіл *кA* и кB. Трикутник $A_1B_1C_1$ називають контактним трикутником

Мальфатті, а точку перетину відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 – першою точкою Адзіми-Мальфатті. [1,6, 7,17]

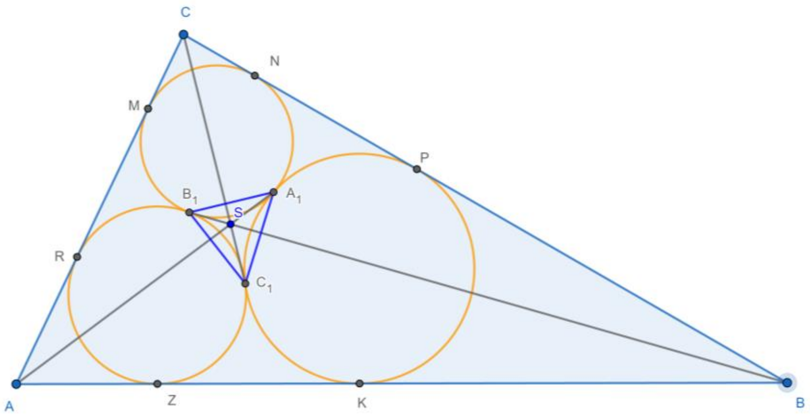
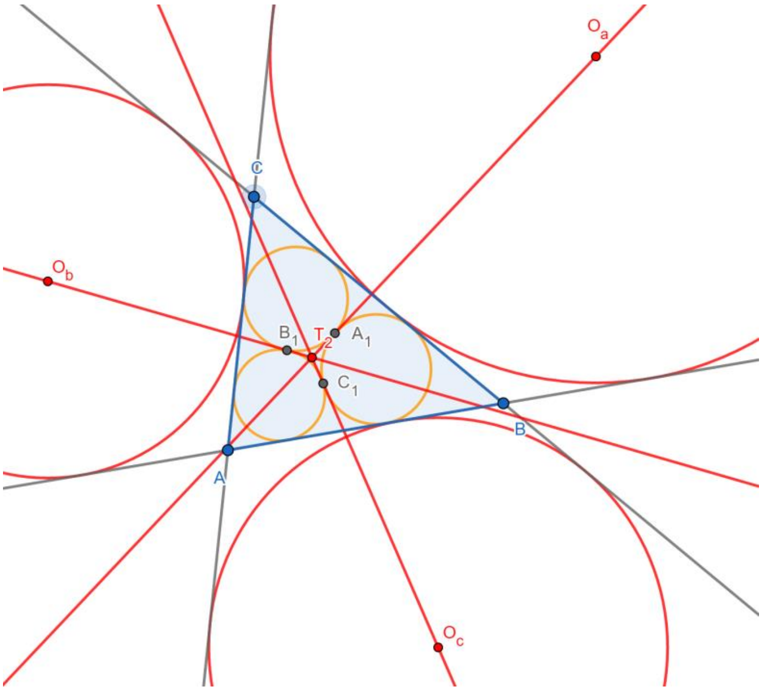


Рис.4

1.3.2. Друга точка Адзіми-Мальфатті.



Друга точка Адзіми - Мальфатті – точка перетину трьох прямих, що з'єднують точки дотику кіл Мальфатті з центрами зовнішньовписанних кіл трикутника. [1,6, 7,17]

Прямі O_aA_1, O_bB_1, O_cC_1 перетинаються в одній точці T_2

Рис.5

1.4. Помилковість твердження Мальфатті

Автор задачі досліджував побудову кругів з помилковим переконанням, що в сумі буде отримано максимально можливу площу трьох непересічних кругів всередині трикутника. Його гіпотезу тривалий час не ставив під сумнів жоден з математиків. Можливо це пов’язане було з тим, що дискусії велись навколо способів побудови, залежності радіусів кіл та знаходження їх центрів у довільних трикутниках.

Лише у 1930 році виявлено, що в деяких трикутниках більша площа може бути отримана за допомогою алгоритму, за яким спочатку вписуємо в трикутник круг максимального радіусу, потім вписуємо другий круг в один з кутів з найменшою величиною кута, а зрештою вписуємо третій круг в одну з п'яти областей, що залишилися. [13]

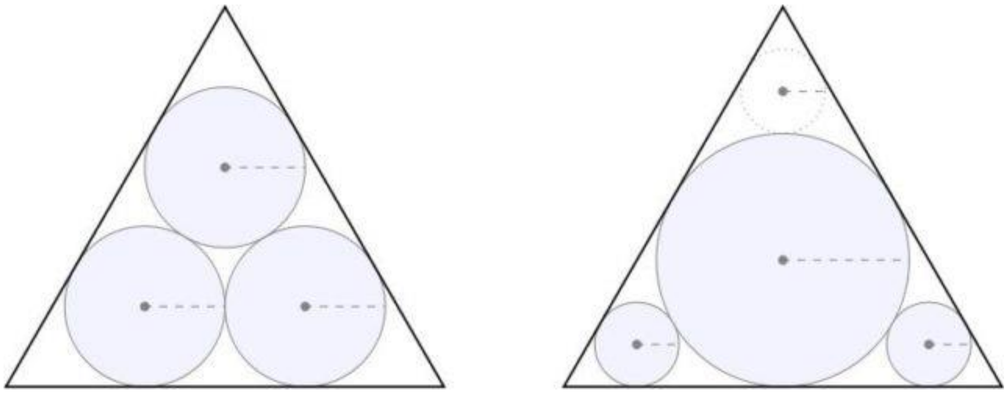


Рис.6

Два розподіли трьох кіл у рівнобічному трикутнику: перше з трьома колами Мальфатті і друге, описане Лобом і Річмондом, в якому вони покривають більшу поверхню, ніж в попередньому. [13]

Якщо взяти рівносторонній трикутник зі стороною 2 см (площа якого дорівнює √3, приблизно 1,7321 см^2). Круги Мальфатті займають площу приблизно 1,2629 см^2, в той час як розподільні круги Лоба і Річмонда мають площу приблизно 1,28 см^2.

Ситуація ще більш очевидна для рівнобедреного трикутника, у якого бічні сторони, набагато більші, ніж основа. Розташування кругів, як вони показані на другому зображенні, тобто три в ряд і дотичні до двох бічних сторін рівнобедреного трикутника, має площу, набагато більшу, ніж площа, відповідна трьом кругам Мальфатті.

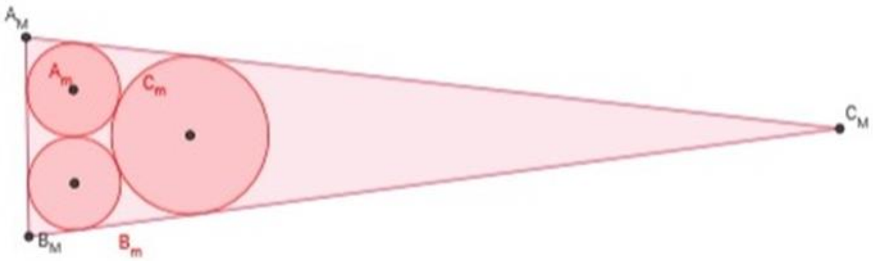


Рис.7

Площа, вкрита кругами Мальфатті в даному трикутнику, становить 41% від загальної площі поверхні трикутника.

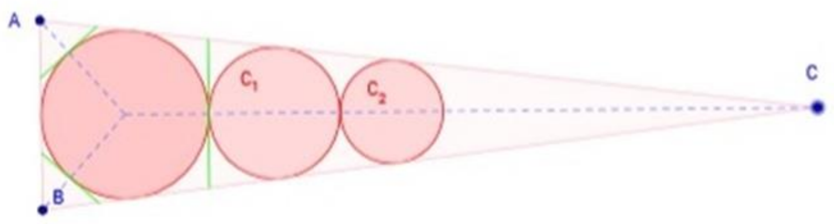


Рис.8

Площа, вкрита трьома кругами, які не є кругами Мальфатті, з цим новим розташуванням в даному трикутнику становить 60% від загальної площі поверхні трикутника.

Різниця в площі для правильного трикутника невелика, трохи більше 1%. Для рівнобедреного трикутника з дуже гострим кутом у вершині оптимальні кола (розташовані один над іншим, починаючи від основи) мають майже подвоєну площу в порівнянні з колами Мальфатті. У 1967 році показано, що для будь-якого трикутника зазначена побудова дає три круги з більшою площею, ніж круги Мальфатті. [16]

Початкова умова Мальфатті була повністю розібрана в 1994 році, коли В.А.Залгаллер і Г.О.Лось у своїй статті «Вирішення проблеми Мальфатті» класифікували всі способи отримання трьох кіл максимальної поверхні всередині трикутника.[9]

Зокрема, вони показали, що існує 14 форм розташувань з трьох кругів, які не перекриваються у трикутнику. Ті, які показані на наступному зображенні.

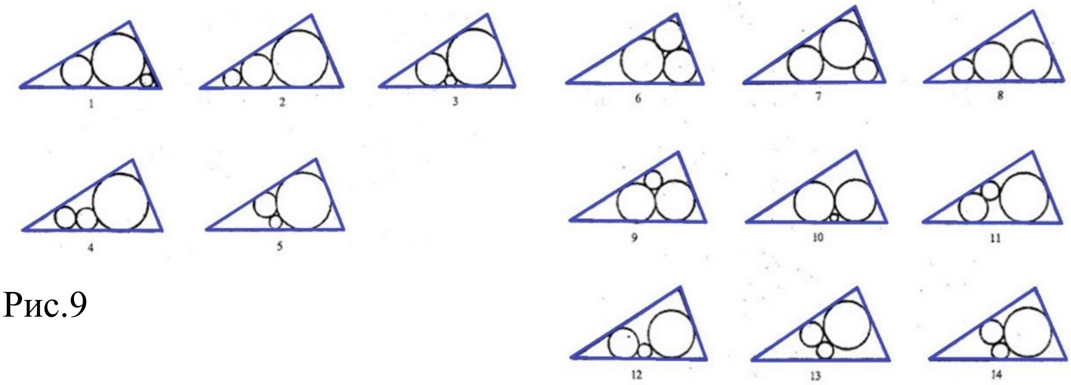


Рис.9

У 1992 році класифіковані всі способи розташування максимальних за сумарною площею кругів всередині трикутника. [6,7]

При використанні цієї класифікації доведено, що є алгоритм, який завжди знаходить круги, максимізує площу і пропонує формулу для визначення, яке розташування кругів оптимальне для заданого трикутника.

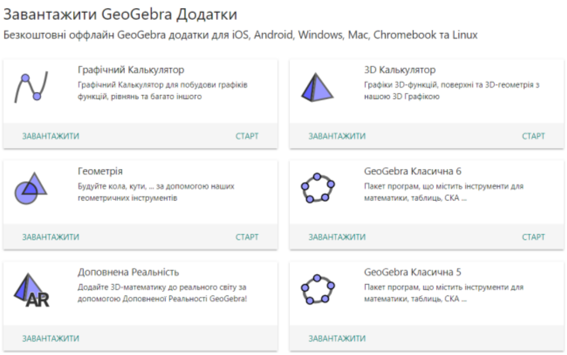
У 1997 році висловлена гіпотеза, що для будь-якого цілого n є алгоритм для заданого трикутника, який знаходить набір з n кругів з максимальною загальною площею.[12]

У 2006 році задачею Мальфатті захопився монгольський математик професор Ренцен Енхбат. Він узагальнив цю задачу на площині: потрібно вписати m кіл в n-кутник. Згодом розглянув розширення постановки завдання Мальфатті в багатовимірних просторах. Результати робіт директора Інституту математики Державного університету Монголії з даної проблеми опубліковані в рейтингових математичних журналах і принесли йому світову популярність. Слід зауважити, що Ренцен Енхбат вважається одним з провідних математиків в світі. Його роботи, такі, як "Оптимізація моделювання і теоретичних розрахунків", "Опукле програмування квазі" були опубліковані в журналі "Springer". Крім того, компанія "Samsung" використовує його розробки у виробництві мобільних телефонів і комп'ютерів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для проведення дослідження кіл (кругів) Мальфатті та пошуку нових властивостей обрано програму GeoGebra, що являє собою інтерактивне творче середовище, засноване на принципах динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри, призначене для створення інтерактивних моделей з математики, що поєднують в собі моделювання та експеримент. Кожна модель – це динамічний образ, що являє собою геометричне зображення, яке ілюструє або описує те чи інше поняття. Є можливість змінювати деякі їх параметри (вільні) та слідкувати за тим, як при цьому будуть змінюватись інші (залежні).

Автором програми є австрійський математик Маркус Хогенвартер, який почав її розробку в 2001 році. Зараз GeoGebra доступна для багатьох платформ: Windows, macOS, GNULinux та для планшетів з Android, iPad, Windows і веб HTML5. Вона має багатомовний інтерфейс, у тому числі український. Програмний засіб постійно вдосконалюється. Він є безкоштовним та вільно розповсюджуваним. Програму можна завантажити на сайті: http://www.geogebra.org. При наявності доступу до мережі Інтернет з програмою можна працювати безпосередньо на сайті, завантаживши потрібний додаток. За таких обставин є вільний доступ до ресурсів, створених науковою спільнотою.



Оскільки під час досліджень нами використовувся додаток «Геометрія», то розглянемо вікно програми, яке відкривається після запуску:

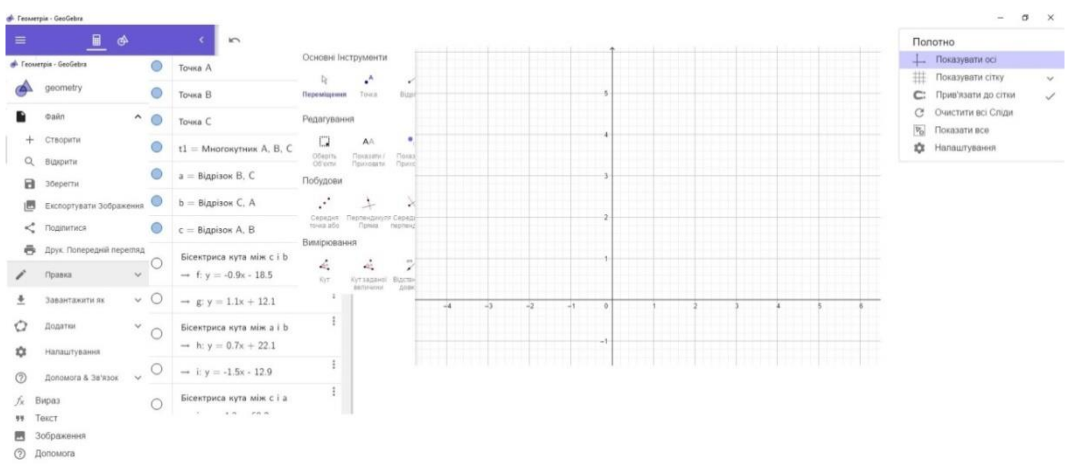


Рис.10

Розберемо призначення кожної області у цьому вікні:

Головне меню – меню основних функціональних можливостей програми.

Панель об’єктів – область, у якій записуються усі об’єкти, створені на полотні (навіть приховані), дозволяє переглянути (відкрити чи закрити) список команд.

Панель інструментів – набір кнопок швидкого доступу до інструментів створення геометричних конструкцій в графічному вікні, які дозволяють виконувати побудову об’єктів за допомогою миші.

Відміна/повторення – дві кнопки, верхня дозволяє відмінити останню дію, нижня – повернути відмінену.

Графічне полотно – основна область, у якій створюються об’єкти.

Рядок команд – поле для вводу алгебраїчних рівнянь, що задають геометричне місце точок і відображаються на панелі об’єктів та полотні.

За допомогою наданих засобів панелі інструментів можна створювати геометричні побудови на графічному полотні за допомогою миші. У той же час відповідні координати і рівняння, які описують створені об’єкти, генеруються в алгебраїчному поданні. Крім того, можна безпосередньо ввести алгебраїчні дані, команди і функції в рядку введення з допомогою клавіатури.

Крім панелей Графічного Полотна та Алгебри, GeoGebra також відкриває панелі Електронної таблиці, Системи Комп'ютерної Алгебри (СКА), та додаткові Графічні поля (для 3В, тощо). Ці різні панелі можуть бути показані або приховані за допомогою меню Налаштування. [19, 22]

Слід зауважити, що система динамічної математики GeoGebra використовується при вивченні математики, фізики та інших навчальних дисциплін у середніх та вищих навчальних закладах багатьох країн світу. Як приклад, можна навести Австрію, Польщу, Німеччину, Великобританію, Канаду, США, Італію, Іспанію, Норвегію, Фінляндію, Швецію, Австралію.

РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1. Модель для демострації побудови кіл Мальфатті

Скорочений алгоритм побудови за методом Штейнера за допомогою програми Geogebra має наступний вигляд:

1. Будуємо довільний трикутник ABC
2. Знаходимо точку I перетину бісектрис побудованого трикутника.
3. Вписуємо кола в трикутники IAB, IAC, IBC
4. Пряма IA є загальною дотичною до двох кіл. Будуємо іншу загальну дотичну.
5. Будуємо загальну дотичну до двох кіл, окрім IB.
6. Будуємо загальну дотичну до двох кіл, окрім IC.
7. Будуємо коло, вписане у чотирикутник, обмежений AB, AC та двома загальними дотичними
8. Будуємо коло, вписане у чотирикутник, обмежений AB, BC та двома загальними дотичними.
9. Будуємо коло, вписане у чотирикутник, обмежений BC, AC та двома загальними дотичними.
10. Переміщуємо точки A, B або C, щоб побачити, що три кола завжди торкаються одне одного та двох сторін трикутника.

У розробленій моделі виконано 68 кроків, щоб виконати наведений вище алгоритм і перевірити правильність її побудови.

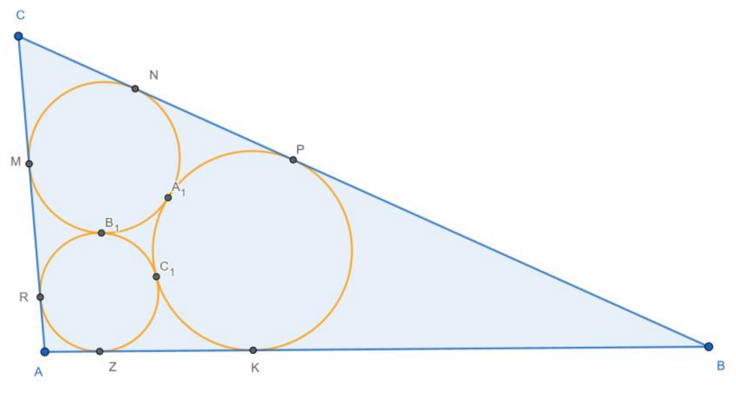


Рис.11

3.2. Модель для дослідження розміщення першої точки Адзіми – Мальфатті

Алгоритм створення моделі має наступний вигляд:

1. Використаємо створену модель для демострації побудови кіл Мальфатті. Проводимо відрізки AA_1, BB_1 та CC_1. Знаходимо точки їх перетину. Переконуємось, що вони співпадають.

2. Переміщуємо точки А, В або С, щоб побачити, що точка перетину відрізків завжди співпадає.

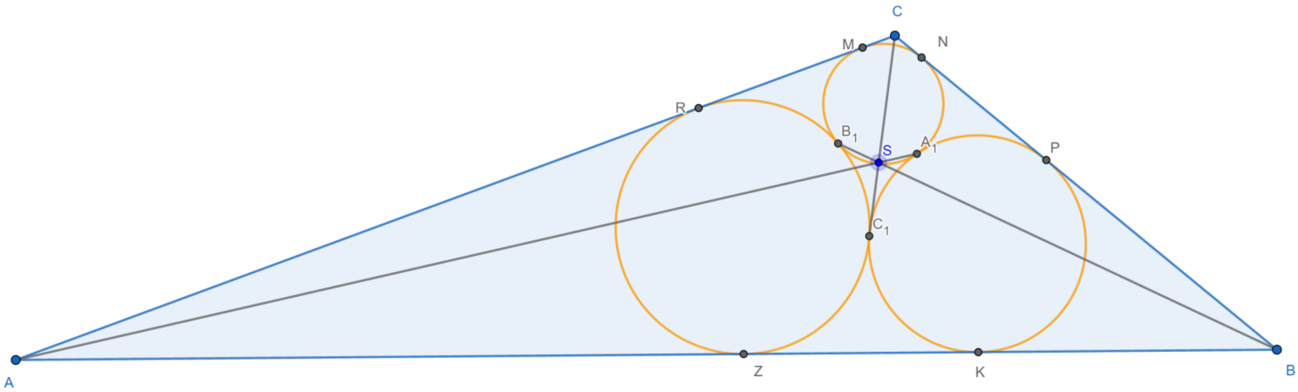


Рис.12

3.3. Модель для дослідження розміщення другої точки Адзіми - Мальфатті

Алгоритм створення моделі має наступний вигляд:

1. На основі створеної моделі для демострації побудови кіл Мальфатті будуємо три зовнішніх кола, що відповідно дотикаються до сторіни трикутника та прямих, що містять дві інші сторони трикутника.

2. Проводимо відрізки O_a, O_b і O_c , що сполучають центри зовнішньовписаних кіл з відповідними точками дотику кіл Мальфатті. Знаходимо точки їх перетину.

3. Переміщуємо точки А, В або С, щоб побачити, що точка перетину відрізків завжди співпадає.

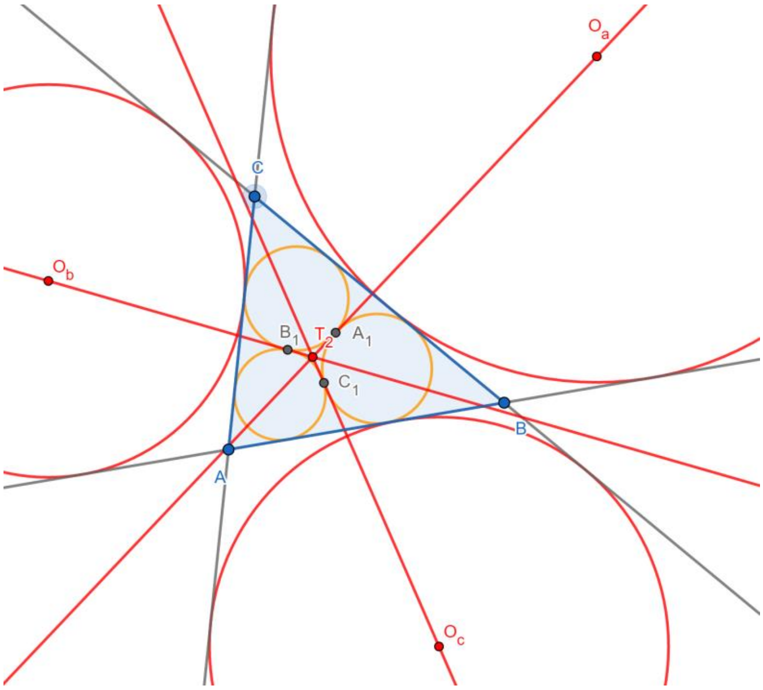


Рис.13

3.4. Модель для демонстрації розміщення точок Адзіми – Мальфатті та центра вписаного кола.

Для створення моделі об’єднуємо раніше створені моделі. Маємо можливість спостерігати за розміщенням точок при зміні виду трикутника.

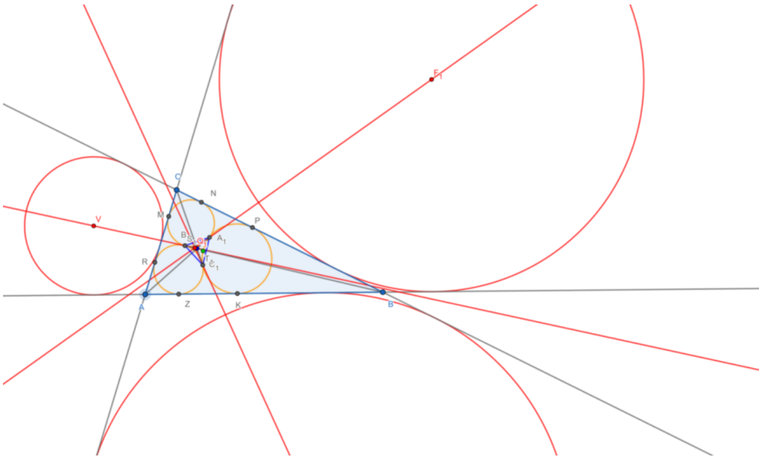


Рис.14

3.5. Модель для демонстрації порівняння площ трьох неперетинних кругів у трикутнику.

Для створення моделі будуємо круги Мальфатті, обчислюємо їх сумарну площу та порівнюємо з площею кругів, побудованих за алгоритмом Лоба- Річмонда.

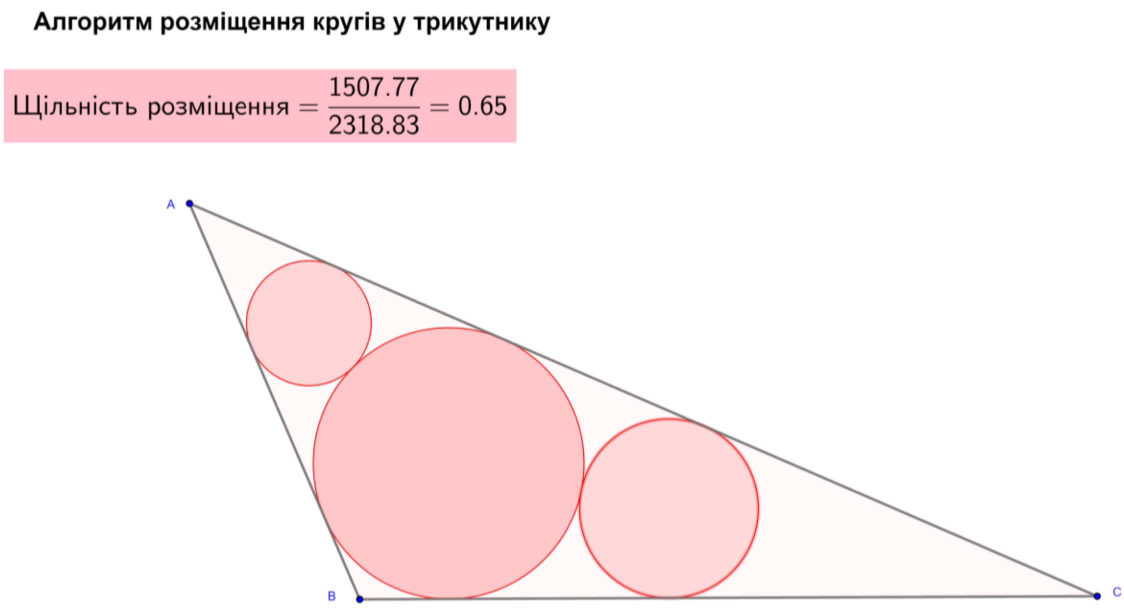


Рис.15

ВИСНОВКИ

Побудовані за допомогою системи динамічної математики GeoGebra інтерактивні моделі підтверджують правильність способу побудови кіл (кругів) Мальфатті та наявність першої та другої точок Адзіми-Мальфатті.

Моделі можна використовувати не лише для демонстрації зазначених математичних фактів, а й вести пошук нових властивостей розміщення точок у трикутнику.

Модель для пошуку найкращого розміщення кругів у трикутнику дозволяє знайти для довільного трикутника розташування непересічних кругів з найбільшою площею.

Програма динамічної математики GeoGebra дозволяє не лише створювати інтерактивні моделі, а і проводити різні експерименти, що значно спрощує пошук нових закономірностей в розташуванні математичних об’єктів для математиків-теоретиків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Окружности Мальфатти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Malfatti_circles, https://ru.wikipedia.org/wiki

2. Адамар Ж. Элементарная геометрия / Ж. Адамар. - М. : Гос. учеб.-пед. изд-во м-ва просвещения РСФСР, 1948 - 1958. Ч. 1: Планиметрия : пособие для высш. пед. учеб. заведений и преподавателей сред. шк. ; пер. с 11-го изд. / под ред. Д. И. Перепёлкина. - 3-е изд. – 607.

3. Адлер А. Теория геометрических построений, Изд. 3-е. — Л.: Учпедгиз, 1940. — 232 с.

4. Попов, Г.Н. Сборник исторических задач по элементарной математике /Г.Н.Попов. - 2-е изд. - М. ; Л. : ОНТИ. Гл. ред. научно-попул. и юношеской лит., 1938. - 216 с.

5. Шклярский Д.О, Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики - Часть 2 - Геометрия (Планиметрия). 1952.

6. В. З. Беленький, А. А. Заславский. О задаче Мальфатти // Квант, Физико-математический журнал для школьников и студентов. — 1994. — Вып. 4 (июль/август). — С. 38-42.

7. И.Богданов, А.Заславский. Ещё раз о задаче Мальфатти (лекция) // Пятая всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина.

8. В. З. Беленький, А. А. Заславский. Решение обобщенной задачи Мальфатти с помощью комплексной (гиперболической) тригонометрии // Математическое просвещение. — 1998. — Вып. 2. — С. 141-154.

9. В.А.Залгаллер, Г.А.Лось. Решение проблемы Мальфатти // Украинский геометрический сборник. 1992, т.35, с.14-33.

10. М.Балк, Г.Балк, Поиск решения, М., 1983 (с.115-120)

11. Алексей Мякишев. О некоторых «треугольных» кониках // Математическое образование. — Москва, 2014. — Вып. 1 (69) январь-март.

12. Titu Andreescu, Oleg Mushkarov, Luchezar N. Stoyanov. Geometric problems on maxima and minima. — Springer-Verlag, 2006. — С. 80–87.

13.H. Lob, H. W. Richmond. On the Solutions of Malfatti's Problem for a Triangle //Proceedings of the London Mathematical Society. — 1930. — Т. 30, вып. 1.

14. Агрономов Н. Задача Мальфатти «Ве́стник о́пытной фи́зики и элемента́рной матема́тики» (№ 437, стр. 105—108; № 440—441, стр. 207—211; № 442, стр. 232—237; № 443—444, стр. 268—271) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.vofem.ru/ru/articles/43702/

15. С. Дж. А. Ивлин, Г. Б. Мани-Каутс, Дж. А. Тиррелл. Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы. //Математическое просвещение. Третья серия, вып. 23. — М.: МЦНМО, 2019. — с.58-79.

16. M. Goldberg. On the Original Malfatti Problem // Mathematics Magazine. — 1967. — Т. 40. — с. 241–247.

17. Milorad R. Stevanović. Triangle centers associated with the Malfatti circles // Forum Geometricorum. — 2003. — Т. 3. — С. 83–93

18. Фукагава Хидэтоси, Тони Ротман, Священная математика, Издательство Принстонского университета Принстон и Оксфорд, 2008 – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://shogi.ru/wasan/Fukagawa/index.htm

19. Markus Hohenwarter. Введение в GeoGebra (версия 4.2). [Електронний ресурс] / Markus Hohenwarter, Judith Hohenwarter. – 153 с. – Режим доступу: http://www.geogebra.org/book/intro-ru.

20. Геогебра: проблема упаковки Малфатти. [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://www.geogebra.org/m/bXjAVqhf]

21. Геогебра: проблема Малфатти - решение Штейнера [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://www.geogebra.org/m/GDOLfx5y]

22. Порхун А. О. Створення інтерактивних моделей у середовищі Geogebra. Онлайн-посібник. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://geogebra-geometry.blogspot.com/p/geogebra-geogebra_18.html