Potenzregel

In der Ableitungsfunktion wird der Exponent als Faktor vor die Variable geschrieben, der Exponent wird um 1 verringert.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \; y = x^n \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

<u>Merkregel</u>

$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n \cdot \; x^{n-1}}$$

Potenzregel für ganzzahlige Exponenten (negative Exponenten)

Die Potenzregel gilt für alle ganzzahligen, also auch für negative Exponenten.

$$\boldsymbol{y = x^{-n} \qquad = \frac{1}{x^n}}$$

$$\boldsymbol{y' = -n \cdot x^{-n-1}}$$

Beweis: Potenzregel

$$y' = \lim_{\Delta x \mapsto 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0}$$ *Zerlegen.*

$$y' = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{(x_1 - x_0) \cdot (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdot x_0 + x_1^{n-3} \cdot x_0^2 + \cdots + x_1 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{(x_1 - x_0)}$$ *Kürzen.*

$$y' = \lim_{x_1 \mapsto x_0} (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdot x_0 + x_1^{n-3} \cdot x_0^2 + \cdots + x_1 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

$$y' = \underbrace{(x_1^{n-1} + \underbrace{x_1^{n-2} \cdot x_0}_{x_0^{n-1}} + \underbrace{x_1^{n-3} \cdot x_0^2}_{x_0^{n-1}} + \cdots + \underbrace{x_1 \cdot x_0^{n-2}}_{x_0^{n-1}} + x_0^{n-1})}_{\text{n- mal}}$$

$$y' = n \cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = n \cdot \; x^{n-1}$$

∎

Erweiterte Potenzregel

Der konstante Faktor c bleibt beim Differenzieren erhalten.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \; y = c \cdot x^n \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$y' = n \cdot c \cdot x^{n-1}$$

Merkregel

$$\boldsymbol{(c \cdot x^n)' = n \cdot c \cdot x^{n-1}}$$