

Μ. Τσιλιπιδής

[Η έννοια της συνάρτησης]

πειραματική διδασκαλία στη Β' Γυμνασίου
με τη διαμεσολάβηση
ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

φύλλο εργασίας

Ομάδα:

Μέλη:

1

2.

3.

4.

5.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	2
Εισαγωγή.....	4
1ο Πείραμα: (εισαγωγή στην έννοια).....	4
Δραστηριότητα (Δ1):.....	4
Ερώτημα (E1):	4
Δραστηριότητα (Δ2):.....	5
Ερώτηση (E2).....	6
2ο Πείραμα: (εύρεση τύπου συνάρτησης).....	6
Ερώτηση (E3).....	6
Ερώτηση (E4.I).....	6
Ερώτηση (E4.II).....	7
Ερώτηση (E5.I).....	8
3ο Πείραμα: Γραφική αναπαράσταση.....	9
Ερώτηση (E5.II).....	9
Δραστηριότητα (Δ3).....	9
Ερώτηση (E6).....	10
Δραστηριότητα (Δ4).....	10
Σύνοψη με μορφή ερωτημάτων	11
Περιγραφή διδακτικών στόχων	13
1 ^ο Πείραμα	13
2 ^ο Πείραμα	13
3 ^ο Πείραμα	14
Δυνατότητες επέκτασης.....	14
Ευχαριστίες	14

Εισαγωγή

Στην οθόνη βλέπετε το αρχείο πείραμα.ggb, του λογισμικού Geogebra, με το οποίο θα πειραματιστούμε.

Σε αυτό υπάρχει ένας **δρομέας Δ**, από τον οποίο παράγονται τιμές για το Δ, από το 1 μέχρι το 1000 και το κουτί εισαγωγής κάτω από το δρομέα, στον οποίο μπορούμε να γράφουμε εμείς τιμές για το Δ. Επίσης, υπάρχουν 2 σειρές από λαμπάκια με ονομασίες O, A, B, C, D,... που το πλήθος τους αλλάζει από το δρομέα «**λαμπάκια**».

Πατώντας το κουμπί **[Αναψε]**, ο δρομέας Δ αλλάζει τιμές και ταυτόχρονα ανάβουν λαμπάκια από την κάθε σειρά.

1ο Πείραμα: (εισαγωγή στην έννοια)

Ρυθμίστε το δρομέα «λαμπάκια» στην τιμή 10 και πατήστε το κουμπί “[Αναψε]” για να αρχίζουν να ανάβουν τα λαμπάκια και το ίδιο κουμπί όταν θέλετε να σταματήσουν να ανάβουν.

Δραστηριότητα (Δ1):

Συμπληρώστε στη 2^η στήλη, τα γράμματα από τα λαμπάκια που άναψαν, στους παρακάτω πίνακες:

1η σειρά λαμπάκια	
Αριθμοί Δ	Λαμπάκια
1	
13	
153	
258	
338	

2η σειρά λαμπάκια	
Αριθμοί Δ	Λαμπάκια
1	
13	
153	
258	
338	

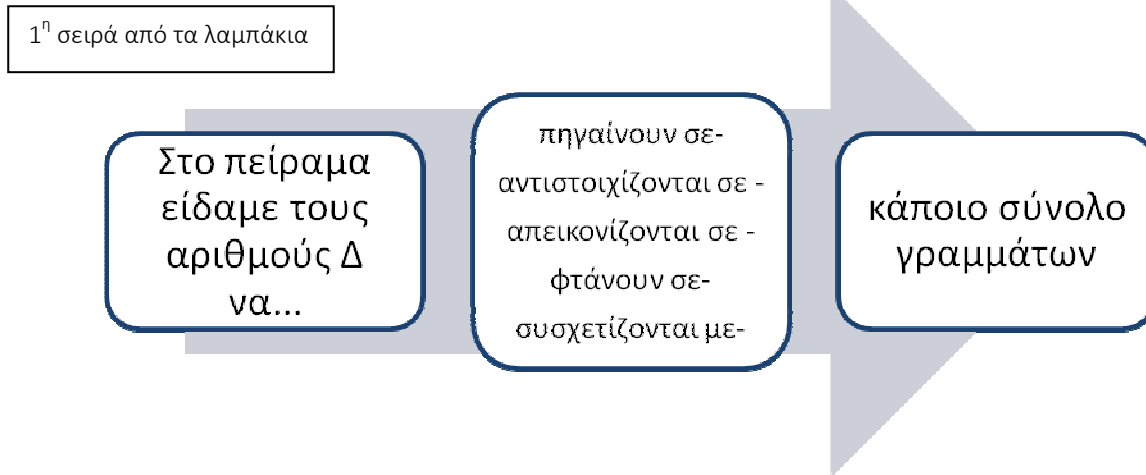
Ερώτημα (Ε1):

Συγκρίνοντας τους δύο προηγούμενους πίνακες, βλέπετε να υπάρχει διαφορά στον τρόπο που κάθε αριθμός Δ ανάβει τα λαμπάκια στις δύο σειρές;

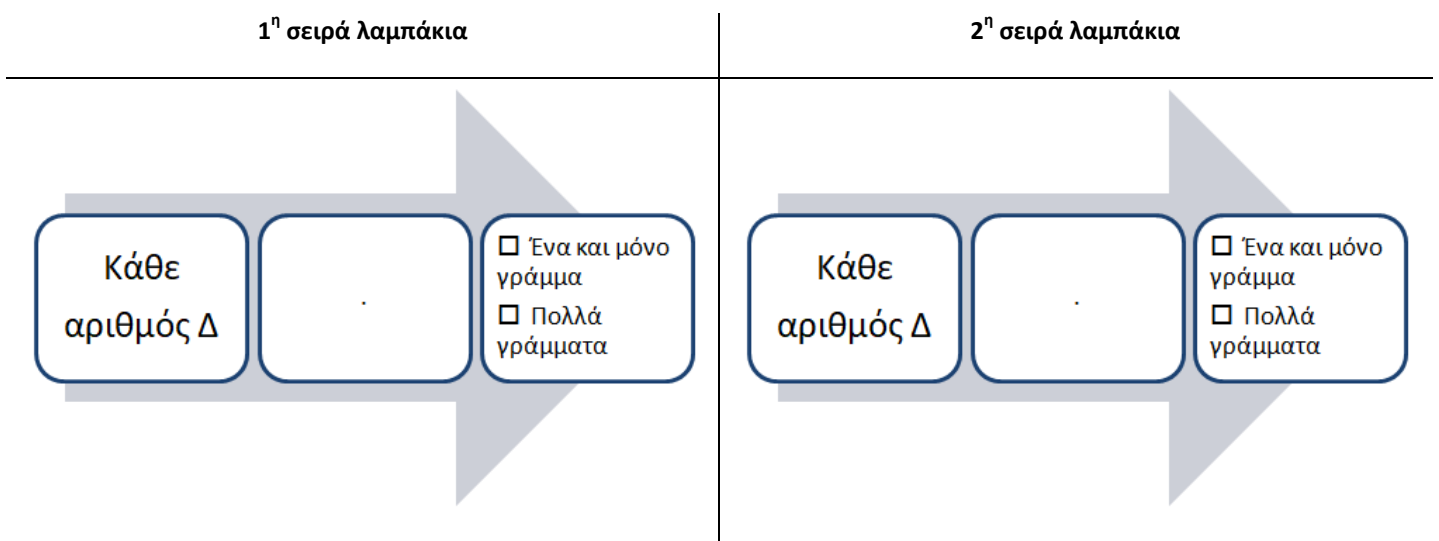
Αν ναι, τότε ποια είναι αυτή;

Δραστηριότητα (Δ2):

Παίρνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις σας για την 1^η σειρά από τα λαμπάκια, επιλέξτε παρακάτω **στο μεσαίο κουτί μέχρι 2 φράσεις**, οι οποίες εκφράζουν καλύτερα για εσάς, την εμπειρία από τον πειραματισμό σας. Διαγράψτε τις υπόλοιπες:



Συμπληρώστε παρακάτω, στα μεσαία κουτιά τη φράση (ή τις φράσεις) που επιλέξατε προηγουμένως και στα κενά κουτάκια δεξιά:



Κάθε σχέση όπως αυτή που συνδέει τους αριθμούς Δ, με τα γράμματα της 1^{ης} σειράς από τα λαμπάκια, θα καλείται **συνάρτηση** ανάμεσα στους αριθμούς Δ (πρώτο σύνολο) και στα γράμματα O,A,B,C,D... (δεύτερο σύνολο)

Προσοχή! Για να εξετάζουμε αν υπάρχει σχέση συνάρτησης ανάμεσα στα στοιχεία δύο συνόλων, παίζει ρόλο ποιο είναι **το πρώτο σύνολο** και ποιο είναι **το δεύτερο σύνολο**.

Οπότε ποια είναι η γνώμη σας για την παρακάτω ερώτηση:

Ερώτηση (Ε2)

Αν πάρουμε ως πρώτο σύνολο τα γράμματα O, A, B, C, D, ... από την 1^η σειρά λαμπάκια και δεύτερο σύνολο τους αριθμούς Δ, τότε έχουμε /δεν έχουμε σχέση συνάρτησης μεταξύ τους;
(διαγράψτε ότι δεν ισχύει)

2ο Πείραμα: (εύρεση τύπου συνάρτησης)

Από το διακόπτη [2^η σειρά], κλείστε τη 2^η σειρά από τα λαμπάκια.

Ερώτηση (Ε3)

Η Μαρία και ο Γιάννης προσπάθησαν να βρουν τον τρόπο που κάθε αριθμός ανάβει κάθε λαμπάκι. Έτσι λοιπόν, αρχικά πειραματίστηκαν με **2 λαμπάκια** και η Μαρία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, αριθμοί όπως το 252, ανάβουν το λαμπάκι O, ενώ αριθμοί όπως το 131, ανάβουν το λαμπάκι A.

Συμφωνείτε με τη Μαρία; Δώστε μια αιτιολόγηση για την απάντησή σας, παρατηρώντας τη **μορφή** των αριθμών που ανάβουν τα λαμπάκια O και A.

Ερώτηση (Ε4.1)

Στη συνέχεια πειραματίστηκαν με **3 λαμπάκια**.

Ο Γιάννης βρήκε ότι οι αριθμοί που είναι **πολλαπλάσια του 3**, θα ανάβουν το λαμπάκι O. Η Μαρία συμφώνησε και ισχυρίστηκε ότι και τα λαμπάκια A και B δεν ανάβουν τυχαία. Όμως ούτε η Μαρία ούτε ο Γιάννης, δεν μπορούσαν να καταλάβουν ποιοι αριθμοί ανάβουν τα λαμπάκια A και B.

Συμφωνείτε με τη Μαρία και τον Γιάννη;

Αν ναι, τότε συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα τιμών και προσπαθήστε από αυτόν να καταλάβετε τη **γενική μορφή** των αριθμών που ανάβουν τα λαμπάκια O, A και B;

Αριθμός Δ	Λαμπάκια
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

Συμπληρώστε εδώ τις ιδέες σας και στο τέλος την απάντησή σας.

Οι αριθμοί Δ που ανάβουν το λαμπάκι **O**, έχουν γενική μορφή

Οι αριθμοί Δ που ανάβουν το λαμπάκι **A**, έχουν γενική μορφή

Οι αριθμοί Δ που ανάβουν το λαμπάκι **B**, έχουν γενική μορφή

Ερώτηση (E4.II)

Ανοίξτε το διακόπτη “hr” και πατήστε το κουμπί “[Αναψε]”.

- A. Ποια γνωστή ισότητα εμφανίζεται δίπλα στις τιμές του Δ; Πώς ονομάζονται οι αριθμοί Δ, π και υ;

Η ισότητα $\Delta=3\pi+υ$ ονομάζεται

Ο αριθμός Δ ονομάζεται, το 3,

Το π και το υ της διαίρεσης του Δ δια 3.

Οι τιμές που μπορεί να πάρει το υ είναι:

B. Συμπληρώστε τις τιμές των αριθμών π και υ στον παρακάτω πίνακα και τα γράμματα από τα λαμπάκια που ανάβουν:

Πίνακας 1				
Δ	δ	π	υ	λαμπάκια
3	3			
4	3			
5	3			
6	3			
7	3			
8	3			
9	3			
...

Γ. Παρατηρώντας τον πίνακα 1, μπορείτε να εκφράσετε τη γενική μορφή των αριθμών Δ που ανάβουν τα λαμπάκια O, A και B; Στη συνέχεια επιλέξτε “Σωστό” ή “Λάθος” για τους αριθμούς και τα λαμπάκια που ανάβουν:

Γενική μορφή των αριθμών Δ	Λαμπάκια που ανάβουν
$\Delta =$	O
$\Delta =$	A
$\Delta =$	B

Αριθμός	Λαμπάκι	Σωστό	Λάθος
21	O		
58	A		
71	B		
90	B		
131	A		

Ερώτηση (E5.1)

Από τον πίνακα 1, μπορείτε να καταλάβετε σε ποια περίπτωση έχουμε σχέση συνάρτησης και σε ποια όχι παρακάτω; (διαγράψτε παρακάτω ότι δεν ισχύει):

Η σχέση που αντιστοιχίζει τους αριθμούς Δ στους αριθμούς π , είναι / δεν είναι σχέση συνάρτησης, γιατί

Η σχέση που αντιστοιχίζει τους αριθμούς π στους αριθμούς Δ , είναι / δεν είναι σχέση συνάρτησης, γιατί

3ο Πείραμα: Γραφική αναπαράσταση

Από το μενού [Προβολή], επιλέξτε [Γραφικά2]. Ανοίξτε τους διακόπτες (π,Δ) και (Δ,π) και δώστε [Αρχή] και μετά [Αναψε]. Εμφανίζονται τα διαγράμματα των αντίστοιχων ζευγών.

Ερώτηση (E5.II)

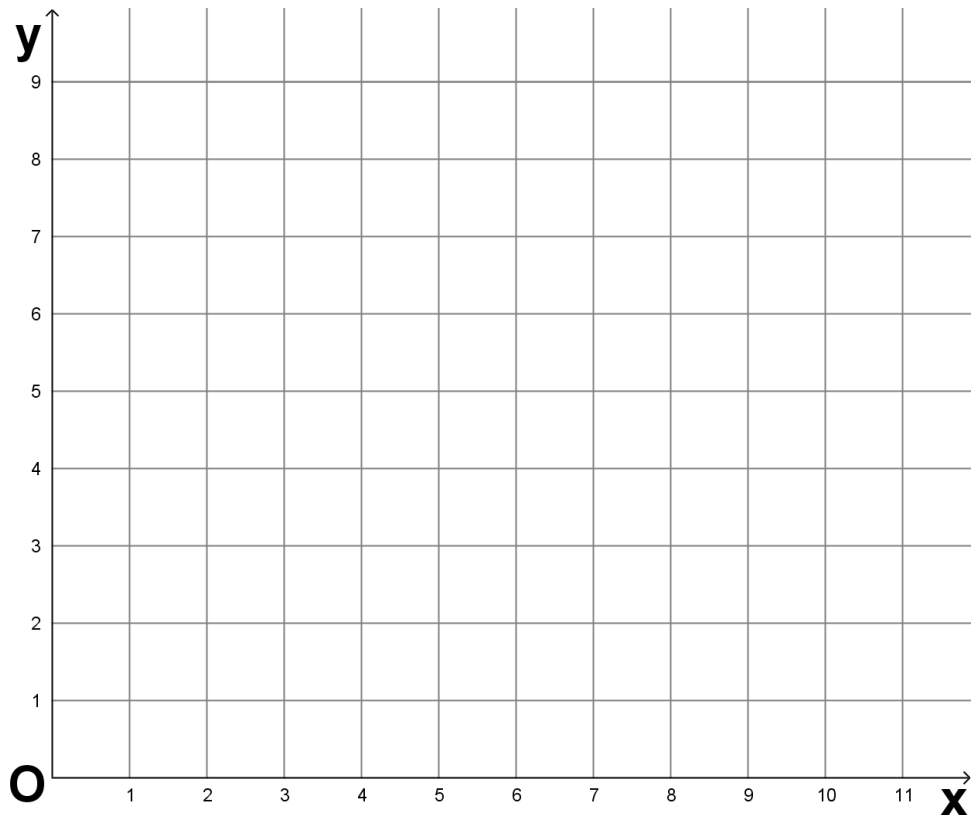
Αν δε γνωρίζαμε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς Δ και π, πώς θα καταλαβαίναμε σε ποια από τα δύο είδη ζευγών (π,Δ) και (Δ,π) έχουμε σχέση συνάρτησης;



Δραστηριότητα (Δ3)

Στο διπλανό σύστημα αξόνων, να παραστήσετε σε σημεία, τα ζεύγη (Δ,υ) του πίνακα 1.

Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να παραστήσετε με άλλο μελάνι και τα ζεύγη (υ,Δ) του πίνακα 1.



Γραφική αναπαράσταση των σημείων με συντεταγμένες (Δ,υ) και (υ,Δ)

Επαλήθευση: Από το μενού “Προβολή”, επιλέξτε “Γραφικά 2” και επαληθεύστε τα διαγράμματά σας, με εκείνα που φαίνονται στο λογισμικό, πατώντας τους διακόπτες (Δ,υ) και (υ,Δ) και το κουμπί “[Αναψε]”.

Ερώτηση (Ε6)

Από τη μορφή των διαγραμμάτων (Δ,υ) και (υ,δ) που κατασκευάσατε προηγουμένως, μπορείτε να καταλάβετε σε ποια περίπτωση έχουμε σχέση συνάρτησης και σε ποια όχι;

(διαγράψτε παρακάτω ότι δεν ισχύει):

Τα ζεύγη (Δ,υ) συνδέονται / δεν συνδέονται με σχέση συνάρτησης, γιατί

.....

Τα ζεύγη (υ,Δ) συνδέονται / δεν συνδέονται με σχέση συνάρτησης, γιατί

.....

Δραστηριότητα (Δ4)

Στο κουτί εισαγωγής “ΒΗΜΑ”, αλλάξτε το βήμα σε 0.1 και πατήστε το κουμπί “[Αναψε]”.

Ποιες αλλαγές παρατηρείτε τώρα στα διαγράμματα των ζευγών (υ,Δ) και (Δ,υ) σε σχέση με το αρχικό διάγραμμα που κατασκευάσατε;

Μπορείτε να δώσετε κάποια ερμηνεία για αυτές τις αλλαγές;

Γράψτε εδώ τις ιδέες σας...

Σύνοψη με μορφή ερωτημάτων

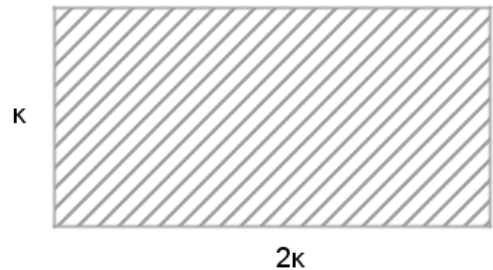
1

Σημειώστε με παρακάτω, πότε έχουμε σχέση συνάρτησης ανάμεσα στα μεγέθη που αναφέρονται:

- Στην ποσότητα ενός γλυκού και στις αντίστοιχες θερμίδες που αυτή η ποσότητα περιέχει.
- Στα κιλά που ζυγίζουν κάποιοι άνθρωποι και στις ηλικίες τους.
- Στο χρόνο που κινείται ένα κινητό με σταθερή ταχύτητα και στο αντίστοιχο διάστημα που διανύει κάθε φορά.
- Στα καλάθια που πετυχαίνουν οι παίκτες σε ένα αγώνα μπάσκετ και στα ύψη τους.
- Στις απουσίες που κάνουν οι μαθητές και στους βαθμούς τους στα μαθηματικά.

2

Στο ορθογώνιο του διπλανού σχήματος, οι πλευρές του έχουν μήκη k και $2k$.



A. Υπάρχει σχέση συνάρτησης ανάμεσα στις τιμές του k και στην περίμετρο $\Pi = 6k$ του ορθογωνίου;

- ΝΑΙ ΟΧΙ

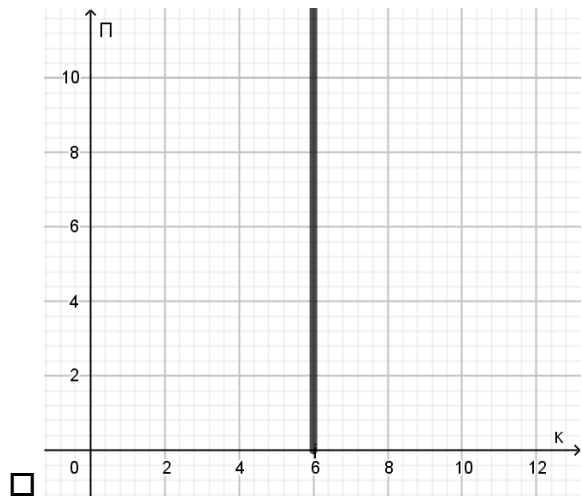
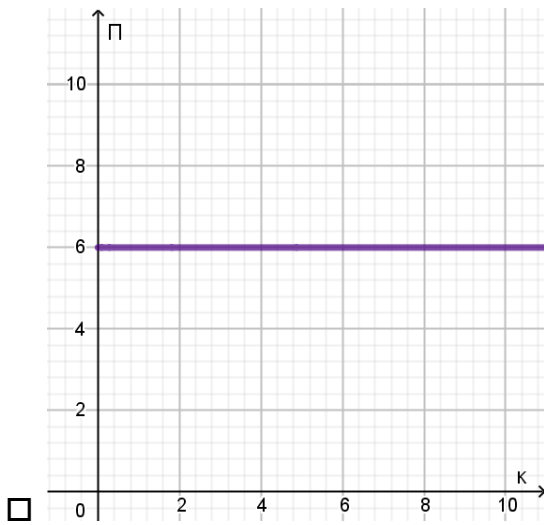
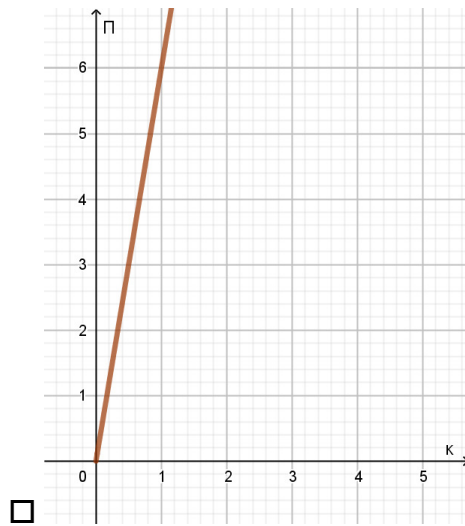
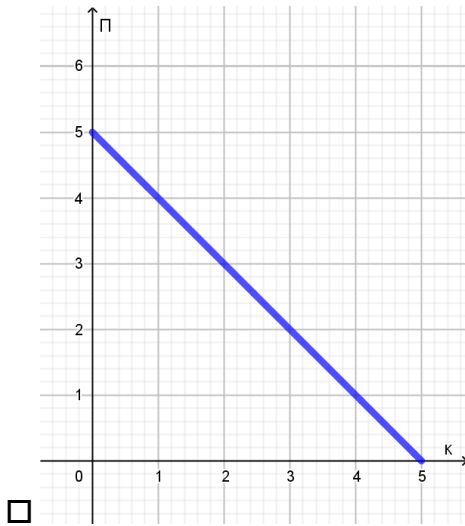
B. Επιλέξτε παρακάτω τη σωστή απάντηση:

- Η περίμετρος Π αυξάνεται όσο αυξάνεται το k
- Η περίμετρος Π μειώνεται όσο αυξάνεται το k
- Η περίμετρος Π παραμένει σταθερή όποιες τιμές κι αν αλλάζει το k .

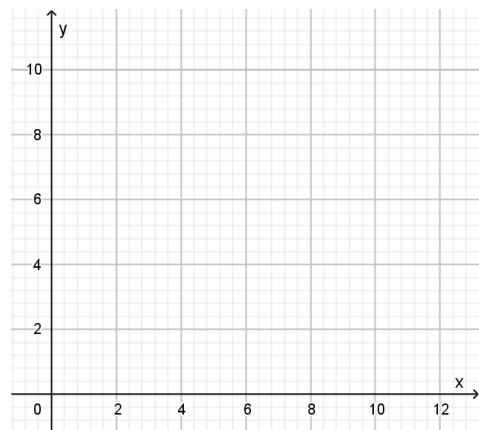
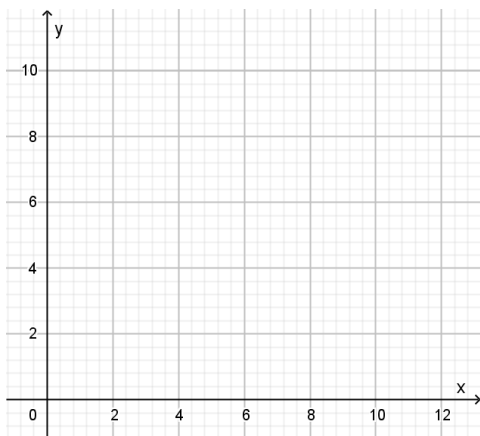
Γ. Στα παρακάτω διαγράμματα, στον οριζόντιο άξονα μετράμε το k και στον κατακόρυφο άξονα την περίμετρο Π . Ποιο από τα παρακάτω 4 διαγράμματα πιστεύετε ότι εκφράζει την σχέση του ερωτήματος Β';

(πιθανώς να σας βοηθήσει το ερώτημα Β')

Δώστε μια αιτιολόγηση για την απάντησή σας παρακάτω:



3 Σχεδιάστε στα συστήματα αξόνων παρακάτω, ένα **κεφαλαίο γράμμα** του ελληνικού αλφάβητου, το οποίο θα μπορούσε να παριστάνει κάποια σχέση συνάρτησης και ένα δεύτερο, το οποίο δεν θα μπορούσε να παριστάνει σχέση συνάρτησης.



Περιγραφή διδακτικών στόχων

1^ο Πείραμα

Στο συγκεκριμένο στάδιο, στόχος είναι η εισαγωγή μέσω του πειράματος, της έννοιας της αντιστοιχίας των στοιχείων ενός συνόλου σε ένα άλλο. Επιπλέον, μέσω του παραδείγματος χρησιμοποιούνται (σκόπιμα) στοιχεία ετερόκλητων συνόλων (αριθμοί σε γράμματα).

Η ακολουθούμενη πορεία, στοχεύει στη διαφοροποίηση των τυχαίων αντιστοιχιών από εκείνες που ορίζουν σχέση συνάρτησης. (**Ερώτηση Ε1**)

Τέλος, στη **Δραστηριότητα Δ2**, θέλουμε να διερευνήσουμε τον τρόπο που οι μαθητές εσωτερικεύουν την έννοια της συνάρτησης, μέσω της αντιστοιχίας των στοιχείων δύο συνόλων. Για το λόγο αυτό, δίνουμε επιλογές φράσεων, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν καλύτερα για αυτούς την έννοια της αντιστοιχίας με μαθηματικό τρόπο .

Στο τέλος του πειράματος αποφεύγουμε την αναφορά του τυπικού ορισμού της συνάρτησης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την εμπειρία που αποκόμισαν από τον πειραματισμό τους, προκειμένου να εσωτερικεύσουν τον τρόπο που ανάβουν τα λαμπάκια από την 1^η σειρά, καθώς και για να αποκτήσουν ένα κριτήριο προκειμένου να απαντήσουν στα επόμενα για διάφορα είδη σχέσεων, αν πρόκειται για συναρτήσεις ή όχι.

2^ο Πείραμα

Σε αυτό το στάδιο επιχειρούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές στην εύρεση κάποιων **γενικών τύπων**, σχετικά με τη μορφή των αριθμών που ανάβουν συγκεκριμένα λαμπάκια. Με άλλα λόγια, στοχεύουμε να νοηματοδοτήσουν την εύρεση του τύπου ως μιας διαδικασίας, η οποία όχι μόνο δίνει τη δυνατότητα πρόβλεψης αποτελεσμάτων, αλλά (ταυτόχρονα) μοντελοποιεί και τη διαδικασία αντιστοίχισης. Προς την κατεύθυνση αυτή, ενσωματώνουμε τη χρήση του πίνακα τιμών ως εργαλείου, που μέσω της ανάγνωσης των στοιχείων του, μπορεί να οδηγήσει στην εύρεση του γενικού τύπου σε κάθε περίπτωση.

Τα ερωτήματα Ε4.Ι και Ε4.ΙΙ λειτουργούν συμπληρωματικά: αν οι μαθητές δεν εντοπίσουν τις γενικές μορφές των αριθμών Δ ως 3π , $3\pi+1$ και $3\pi+2$ που ανάβουν τα λαμπάκια O , A και B αντίστοιχα, θα τους οδηγήσουμε στο ερώτημα Ε4.ΙΙ όπου με την ανατροφοδότηση από το λογισμικό, θέλουμε να οδηγηθούν στο σχηματισμό των προηγούμενων μορφών. Στο ίδιο ερώτημα, καλούνται να χαρακτηρίσουν με Σ ή Λ αν οι αριθμοί που αναφέρονται ανάβουν τα αντίστοιχα λαμπάκια, προκειμένου να δουν μία χρήση των γενικευμένων μορφών που σχημάτισαν για τους αριθμούς Δ .

3^ο Πείραμα

Στο τελικό αυτό στάδιο, δίνουμε μια πρώτη εικόνα των διαγραμμάτων (Δ, π) και (π, Δ) . Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να σχεδιάσουν τα διαγράμματα των σημείων (Δ, ν) και (ν, Δ) στο ίδιο σύστημα αξόνων. Είναι φανερό ότι αυτή αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (εφόσον μέχρι αυτού του σημείου στο πείραμα επί της ουσίας περιγράφουμε τύπους ακολουθίας). Ουσιαστικά πρόκειται για μια πρώιμη αναπαραστασιακή εικόνα της γραφικής παράστασης, δεδομένου ότι σε αυτό το στάδιο τα διαγράμματα αποτελούνται από μεμονωμένα σημεία. Η συγκεκριμένη επιλογή στοχεύει στο να υπάρξει ομαλή μετάβαση από αυτό τον τύπο διαγραμμάτων σε εκείνα των συνεχών συναρτήσεων (για το σκοπό αυτό υπάρχει και η δραστηριότητα Δ4).

Στο ερώτημα Ε5, θέλουμε να εξετάσουμε τον τρόπο που νοηματοδοτούν το διάγραμμα των σημείων (ν, Δ) ως προς τον κανόνα (τυπικό ορισμό) της συνάρτησης που έδωσαν στη Δραστηριότητα Δ2. Για το λόγο αυτό τίθεται το ερώτημα ποια ζεύγη από τα (Δ, ν) και (ν, Δ) συνδέονται με σχέση συνάρτησης.

Στο τελικό στάδιο (Δραστηριότητα Δ4) θέλουμε να δημιουργήσουμε εννοιολογική σύνδεση των γραφημάτων όπως αυτό που σχεδίασαν με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών, με τα αντίστοιχα διαγράμματα (των ίδιων τύπων) όταν η συνάρτηση επεκταθεί στο σύνολο των ρητών (για το πείραμα) ή των πραγματικών αριθμών.

Δυνατότητες επέκτασης

Το πείραμα μπορεί να επεκταθεί σε έτερο χρόνο, στη μελέτη της περίπτωσης $\Delta=3\pi$ (δίνοντας $BHMA=3$ στο αντίστοιχο κουτί εισαγωγής του δομήματος) και στη χάραξη των αντίστοιχων διαγραμμάτων όταν το Δ παίρνει και τιμές από το \mathbb{R} (διακόπτης dec).

Τέλος, μπορεί να ενταχθούν και αρνητικές τιμές στο Δ (αλλαγή των χαρακτηριστικών του δρομέα με τιμές για παράδειγμα, από -1000 έως 1000).

Ευχαριστίες

Στον αγαπητό συνάδελφο **Γ. Κουσινιώρη** (Διευθυντή Γυμνασίου Γαστούνης) που τα ψηφιακά του δομήματα για τη διδασκαλία του δεκαδικού και του δυαδικού συστήματος αρίθμησης, μού έδωσαν την εναρκτήρια ιδέα για το παρόν.

Στον πιστό φίλο και συνάδελφο **Ι. Χριστοδούλου**, για τη συνεργασία και τη δυνατότητα που μού έδωσε, να εκτελέσω την πρώτη πειραματική διδασκαλία της παρούσης εργασίας στο σχολείο του (Γυμνάσιο «Αντ. Σαμαράκης – 3^ο Γυμνάσιο Αγ. Βαρβάρας).

Μ. Τσιλιπρίδης

Νοέμβριος 2017