

Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 9 - método de integración por partes

¿Qué significa integrar por partes?

Sea la integral arbitraria $\int f(x) dx$. El método de integración por partes plantea que $\int f(x) dx$ puede expresarse como dos partes diferenciadas: como un producto de funciones más una integral más sencilla que la de partida.

Supongamos que tenemos el producto de funciones $u(x) \cdot v(x)$. Su derivada será:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Si integramos esta expresión, obtenemos:

$$\int \frac{d[u(x) \cdot v(x)]}{dx} dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

La integral y la derivada son procesos inversos, por lo que:

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Reordenamos:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Si conseguimos expresar $\int f(x) dx$ como $\int u(x) \cdot v'(x) dx$, tendremos la integral del producto de una función derivable $u(x)$ y de una función integrable $v'(x)$. Y el resultado será igual al producto $u(x) \cdot v(x)$ más una nueva integral $\int u'(x) \cdot v(x) dx$.

Si **la nueva integral $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ es más sencilla que la original $\int f(x) dx$** , tendrá sentido aplicar el método por partes. En caso contrario, debemos buscar otra opción.

La clave reside en saber qué parte de la integral de partida juega el papel $u(x)$ y qué parte es $v'(x)$. El razonamiento debe ser el siguiente: la parte que pueda derivarse será $u(x)$ y la parte que pueda integrarse fácilmente será $v'(x)$. De $u(x)$ pasamos a $u'(x)$ diferenciando, y de $v'(x)$ pasamos a $v(x)$ integrando.

Ejemplo 1 resuelto

Sea $\int x \cdot \cos(x) dx$

Identificamos partes en la integral:

$$u = x \rightarrow \text{diferenciamos} \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(x) dx \rightarrow \text{integramos} \rightarrow v = \sin(x)$$

Por lo tanto podemos desarrollar la integral de partida de la siguiente forma:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx$$

Donde observamos que la nueva integral que resulta tras aplicar partes es inmediata:

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Este método es muy potente, y especialmente útil cuando podemos distinguir en la integral de partida términos “muy distintos entre sí”. Como en el ejemplo anterior, por un lado x y por otro lado $\cos(x)$.