Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 19 - adjunto y aplicación en el cálculo de la matriz inversa

1. Sean $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **. Calcula la matriz que verifica** $A\,B^t X-X=2B$ **.**

$$A\,B^t X-X=2B \;\rightarrow\; (A\,B^t-I)\,X=2B \;\rightarrow\; X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2B$$

$$A\,B^t-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$|A\,B^t-I|=-1$ → El determinante no es nulo, por lo que existe la matriz inversa.

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|}$$

Recordamos que la matriz de adjuntos tiene como elementos los distintos adjuntos $A_{ij}=(-1)^{i+j}|\alpha_{ij}|$ de la matriz.

$A_{11}=2$, $A_{12}=-1$, $A_{13}=0$

$A_{21}=1$, $A_{22}=0$, $A_{23}=0$

$A_{31}=1$, $A_{32}=-1$, $A_{33}=1$

Es decir:

$$adj(A\,B^t-I)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; [adj(A\,B^t-I)]^t=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|} \;\rightarrow\; (A\,B^t-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Operamos:

$$X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2B \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}-8\\4\\-2\end{pmatrix}$$

2. Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ **. Decidir si la matriz tiene inversa para** $a=1$ **y, en caso afirmativo, calcularla.**

Calculamos el determinante de la matriz.

$$|A|=-a(a^2-1)-(2a)=-a^3-a$$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3-a=0 \rightarrow -a(a^2+1)=0 \rightarrow a=0$$

Discusión de casos.

$Si \quad a\neq 0 \rightarrow rango(A)=3$ → sí admite inversa

$Si \quad a=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \rightarrow$ Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → $rango(A)=2$ → no admite inversa

Por lo tanto, para $a=1$ la matriz si existe inversa, ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Calculamos los distintos adjuntos.

$$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=0 \quad , \quad A_{13}=-2$$

$$A_{21}=1 \quad , \quad A_{22}=-2 \quad , \quad A_{23}=1$$

$$A_{31}=-1 \quad , \quad A_{32}=0 \quad , \quad A_{33}=-1$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

a) Para $m=1$ **calcula** A^{-1} **.**

b) Para $m=1$ **calcula** X **que satisface** $A\cdot X-B=A\cdot B$ **.**

a) $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A|=0-1=-1\neq 0$ → Existe A^{-1} $\rightarrow$ $A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$

$A_{11}=0$, $A_{12}=-1$

$A_{21}=-1$, $A_{22}=2$

Es decir → $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

En efecto → $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A\cdot X-B=A\cdot B \rightarrow A\cdot X=A\cdot B+B \rightarrow A\cdot X=(A+I)B \rightarrow X=A^{-1}\cdot(A+I)\cdot B$

$X=(A^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot I)\cdot B \rightarrow X=(I+A^{-1})\cdot B$

Operamos.

$I+A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(I+A^{-1})\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ **.**

a) Obtener $|A^{10}|$ **.**

b) Para $m=0$ **calcular, si es posible, la matriz inversa de** A **.**

a) $|A^{10}|=|A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot\ldots\cdot|A|=|A|^{10}$

$|A|=(m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}|=((m+2)(m^2-1))^{10}$

b) Si $m=0 \rightarrow |A|=(0+2)(0-1)=-2\neq 0$ → Existe la matriz inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos.

$A_{11}=-1$, $A_{12}=-2$, $A_{11}=-1$

$A_{21}=0$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=0$

$A_{31}=0$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=2$

$$[adj(A)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, esta es la matriz inversa, ya que satisface: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

5. Considera $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ **para los que la matriz** $A+\lambda I$ **no tiene inversa (** I **es la matriz identidad).**

b) Resuelve $A X=-3 X$ **. Determina, si existe, alguna solución con** $x=1$ **.**

a) Operamos matricialmente.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{pmatrix}$$

Una matriz admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto:

$$|A+\lambda I|=(-2+\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda)-4(-2+\lambda)$$

Sacamos factor común e igualamos a cero.

$$(-2+\lambda)[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0$$

En un producto igualado a cero, al menos uno de los términos debe anularse. Es decir:

$$(-2+\lambda)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=2$$
$$[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2-\lambda-6=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=-2 \quad , \quad \lambda=3$$

En conclusión. Existe inversa siempre y cuando se cumpla que $\lambda\neq-2$, $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq 3$

b) Operamos e igualamos.

$$A X=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x-2y\\ -2x+y\\ -2z\end{pmatrix} \quad , \quad -3X=-3\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x-2y\\ -2x+y\\ -2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales, por lo que obtenemos un sistema 3x3.

$$\left\{\begin{matrix} -2x-2y=-3x \\ -2x+y=-3y \\ -2z=-3z \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{De la tercera ecuación} \rightarrow \quad z=0$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{matrix}\right\}$$

La segunda ecuación es -2 veces la primera, por lo que podemos obviarla.

$x-2y=0 \rightarrow \quad x=2y \rightarrow$ Una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo: $y=\alpha$. De esta forma, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Sus infinitas soluciones son:

$$\left\{\begin{matrix} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Si} \quad \alpha=\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{solución general con} \quad x=1$$

6. Sea $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de a **existe la inversa de** A **?**

b) Hallar el valor de a **para que se cumpla** $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ **.**

a) La matriz A de orden $n=3$ posee inversa si su determinante es no nulo. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2+0+0-(0+0+0)=-2a^2\neq 0$$

Por lo tanto, si $a\neq 0$ → $|A|\neq 0$ → Existe inversa de A .

b) Calculamos la inversa de A .

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix}}{-2a^2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

E igualamos la inversa a $\frac{1}{4}A$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}$$

Igualamos cada uno de los coeficientes de ambas matrices para obtener las condiciones que debe cumplir a .

- Coeficientes $a_{11} \rightarrow \frac{1}{a}=\frac{a}{4} \rightarrow a=\pm 2$
- Coeficientes $a_{12} \rightarrow \frac{-1}{a}=\frac{-1}{2} \rightarrow a=2$
- Coeficientes $a_{32} \rightarrow \frac{1}{2a}=\frac{1}{4} \rightarrow a=2$
- Coeficientes $a_{33} \rightarrow \frac{1}{a}=\frac{a}{4} \rightarrow a=\pm 2$

Por lo tanto las cuatro condiciones se cumplen siempre que $a=2$.

7. Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$A\,B\,C = D \quad \rightarrow \quad B = A^{-1}\,D\,C^{-1}$$

Calculamos las inversas de A y de C, siempre y cuando sus determinantes sean no nulos (condición necesaria y suficiente para existencia de matriz inversa).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 1$$

$$A^{-1} = \frac{[adj(A)]^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |C| = 1$$

$$C^{-1} = \frac{[adj(C)]^t}{|C|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B = A^{-1}\,D\,C^{-1} \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

8. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de m **se verifica** $A^2=2A+B$ **?**

b) Para $m=1$ **calcula** A^{-1} **.**

c) Para $m=1$ **calcula** X **que satisface** $A\cdot X-B=A\cdot B$ **.**

a) $A^2=2A+I \rightarrow \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Operamos.

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 1+m+1-m \\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2+2+2m & 2 \\ 2 & m^2+2-2m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2m & 1 \\ 3 & 2-2m \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$2=1 \quad , \quad 2=3$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

b) $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A|=0-1=-1\neq 0$ → Existe $A^{-1} \rightarrow A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$

$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=-1$

$A_{21}=-1 \quad , \quad A_{22}=2$

Es decir → $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

En efecto → $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\cdot X-B=A\cdot B \rightarrow A\cdot X=A\cdot B+B \rightarrow A\cdot X=(A+I)B \rightarrow X=A^{-1}\cdot(A+I)\cdot B$$

$$X=(A^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot I)\cdot B \rightarrow X=(I+A^{-1})\cdot B$$

Operamos.

$$I+A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I+A^{-1})\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ **.**

a) Obtener $|A^{10}|$ **.**

b) Para $m=0$ **calcular, si es posible, la matriz inversa de** A **.**

a) $|A^{10}|=|A\cdot A\cdot A\cdot ...\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot ...\cdot|A|=|A|^{10}$

$|A|=(m+2)(m^2-1) \rightarrow |A^{10}|=((m+2)(m^2-1))^{10}$

b) Si $m=0 \rightarrow |A|=(0+2)(0-1)=-2\neq 0$ → Existe la matriz inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos.

$A_{11}=-1$, $A_{12}=-2$, $A_{11}=-1$

$A_{21}=0$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=0$

$A_{31}=0$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=2$

$$[adj(A)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, esta es la matriz inversa, ya que satisface: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

10. Sea $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 2 & 1 & a^2-1\end{pmatrix}$ **.**

a) Calcular el rango de A **en función del parámetro real** a **.**

b) Decidir si la matriz tiene inversa para $a=1$ **y, en caso afirmativo, calcularla.**

a) Calculamos el determinante de la matriz → $|A|=-a(a^2-1)-(2a)=-a^3-a$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3-a=0 \rightarrow -a(a^2+1)=0 \rightarrow a=0$$

Discusión de casos.

$$Si \quad a\neq 0 \rightarrow rango(A)=3$$

$Si \quad a=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$ → Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → $rango(A)=2$

b) Para $a=1$ si existe inversa, ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Calculamos los distintos adjuntos.

$$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=0 \quad , \quad A_{13}=-2$$

$$A_{21}=1 \quad , \quad A_{22}=-2 \quad , \quad A_{23}=1$$

$$A_{31}=-1 \quad , \quad A_{32}=0 \quad , \quad A_{33}=-1$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-2} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

11. Sean $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **.**

a) Estudia, según los valores de k **, el rango de la matriz resultante de operar** $A\,B^t+k\,I$ **, donde** B^t **es la matriz traspuesta de** B **e** I **es la matriz identidad de orden 3.**

b) Calcula la matriz que verifica $A\,B^t\,X-X=2\,B$ **.**

a) $A\,B^t=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $k\,I=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}$

$$A\,B^t+kI=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k & 1 & 1\\-1 & -1+k & -1\\0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante $|A\,B^t+k\,I|$. Si el determinante fuese distinto de 0, su rango sería 3. Y para los valores de k donde se anule el determinante, estimaremos en cada caso el rango de la matriz.

$$|A\,B^t+k\,I|=\begin{vmatrix}1+k & 1 & 1\\-1 & -1+k & -1\\0 & 0 & k\end{vmatrix} \rightarrow |A\,B^t+k\,I|=k\,(k^2-1)+k \rightarrow |A\,B^t+k\,I|=k^3$$

Si $k\neq 0 \rightarrow |A\,B^t+k\,I|\neq 0 \rightarrow Rango=3$

Si $k=0 \rightarrow |A\,B^t+k\,I|=0 \rightarrow Rango\neq 3$

Estudiamos el rango para $k=0 \rightarrow A\,B^t+0\cdot I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ → Las tres columnas de la matriz son iguales, por lo que solo hay un vector columna linealmente independiente dentro de la matriz → $Rango=1$.

b) $A\,B^t\,X-X=2\,B \rightarrow (A\,B^t-I)\,X=2\,B \rightarrow X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2\,B$

$$A\,B^t-I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\-1 & -2 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$|A\,B^t-I|=-1$ → El determinante no es nulo, por lo que existe la matriz inversa.

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj\,(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|}$$

Recordamos que la matriz de adjuntos tiene como elementos los distintos adjuntos $A_{ij}=(-1)^{i+j}|\alpha_{ij}|$ de la matriz.

$A_{11}=2$, $A_{12}=-1$, $A_{13}=0$

$A_{21}=1$, $A_{22}=0$, $A_{23}=0$

$A_{31}=1$, $A_{32}=-1$, $A_{33}=1$

Es decir:

$$adj(A\,B^t-I)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow [adj(A\,B^t-I)]^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|} \rightarrow (A\,B^t-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Operamos:

$$X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2\,B \rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}-8\\ 4\\ -2\end{pmatrix}$$