Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 19 - matriz n-ésima

1. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2=I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3). Obtener A^n para cualquier número natural n .

$A=A$

$A^2=I$

$A^3=A\cdot A^2=A\cdot I=A$

$A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I$

Con estos primeros resultados podemos inferir:

$A^n=A\ ,\ \ si\ \ n\ \ es\ \ impar$

$A^n=I\ ,\ \ si\ \ n\ \ es\ \ par$

Demostremos esta expresión de A^n por inducción matemática.

Comprobamos para $n=1 \rightarrow A=A$

Suponemos cierta para $n \rightarrow A^n=A\ ,\ si\ \ n\ \ es\ \ impar\ \ ,\ \ A^n=I\ ,\ si\ \ n\ \ es\ \ par$

Demostramos para $n+1$ a partir de los resultados anteriores de A^n y A^n .

Si $n+1$ es par → n es impar → $A^{n+1}=A^n\cdot A=A\cdot A=A^2=I$.

Si $n+1$ es impar → n es par → $A^{n+1}=A^n\cdot A=I\cdot A=A$.

Como queríamos demostrar.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2\\ -8 & 7 & 4\\ 8 & -6 & -3\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X **que verifica** $A\,X+B=2\,A$ **.**

b) Calcular B^2 **y** B^{2016} **.**

a) $A\,X+B=2\,A \;\rightarrow\; A\,X=2\,A-B \;\rightarrow\; A^{-1}A\,X=A^{-1}(2\,A-B) \;\rightarrow\; X=A^{-1}(2\,A-B)$

Donde hemos aplicado matriz inversa de A a la izquierda de cada miembro de la igualdad, y recordado que una matriz multiplicada por su inversa es igual a la matriz identidad.

La matriz A admite inversa siempre que su determinante sea distinto de cero. En efecto:

$$|A|=-1+0+0-(-2+0+0)=1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$$

Vamos a obtener la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+F_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow F'_1=F_1+F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_1=F_1-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1\end{array}\right) \rightarrow F'_1=-F_1 \;,\; F'_3=-F_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1\end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

En efecto, se comprueba que $A\,A^{-1}=A^{-1}A=I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

$$2\,A-B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2\\ -8 & 7 & 4\\ 8 & -6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 8 & -5 & -4\\ -12 & 8 & 5\end{pmatrix}$$

Y la matriz incógnita resulta:

$$X=A^{-1}(2A-B)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&-5&-4\\-12&8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-9&-5\\8&-5&-4\\6&-5&-1\end{pmatrix}$$

b) $B^2=\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&3&2\\-8&7&4\\8&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \rightarrow B^2=I \rightarrow B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=B$

Donde recordamos que el producto de una matriz cuadrada por la matriz identidad, resulta la misma matriz.

$$B^4=B^3\cdot B=B\cdot B=B^2=I$$
$$B^5=B^4\cdot B=I\cdot B=B$$
$$B^6=B^5\cdot B=B\cdot B=B^2=I$$

En general:

Si $n=impar \rightarrow B^n=B$

Si $n=par \rightarrow B^n=I$

Como 2016 es par → $B^{2016}=I$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ **hallar** $B=A+A^2+A^3+...+A^n$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&0\\0&3^2&0\\0&0&4^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&27&0\\0&0&64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&0\\0&3^3&0\\0&0&4^3\end{pmatrix}$$

Podemos inferir que la potencia n-ésima será:

$$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$$

Demostrémoslo por inducción matemática.

Comprobamos para $n=1$ $\rightarrow$ $A^1=\begin{pmatrix}2^1&0&0\\0&3^1&0\\0&0&4^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=A$

Suponemos cierto el término n-ésimo → $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$

Demostramos: $¿A^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1}&0&0\\0&3^{n+1}&0\\0&0&4^{n+1}\end{pmatrix}?$. A partir de A^n y de A operamos.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}&0&0\\0&3^{n+1}&0\\0&0&4^{n+1}\end{pmatrix}$$ → Como queríamos demostrar.

Por lo tanto la matriz suma de los n primeros términos será:

$$B=A+A^2+A^3+...+A^n=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^2&0&0\\0&3^2&0\\0&0&4^2\end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2+2^2+2^3+..+2^n&0&0\\0&3+3^2+3^3+..+3^n&0\\0&0&4+4^2+4^3+...+4^n\end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos suma de términos que se diferencian, de forma consecutiva, en el producto por una razón r . Estamos ante la suma de los términos de una progresión geométrica de razón r .
Por ejemplo, en la primera fila, tenemos el número 2 más $2\cdot 2$ más $2\cdot 2\cdot 2$ más … así hasta el término n-ésimo. ¿Cómo obtener el resultado final de esta suma?
Podemos acordarnos de la fórmula que suma los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r :

$$S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}=\frac{2^n\cdot 2-2}{2-1}=2\cdot(2^n-1)$$

O bien obtener este valor con el siguiente razonamiento:

$$S_n=2+2^2+2^3+...+2^n$$

$$-2\cdot S_n=-2^2-2^3-2^4-...-2^{n+1}$$

Sumando ambas expresiones:

$$S_n-2\,S_n=2-2^{n+1}\;\rightarrow\;-S_n=2-2^{n+1}\;\rightarrow\;S_n=2^{n+1}-2\;\rightarrow\;S_n=2(2^n-1)$$

Llegando al mismo resultado obtenido en la fórmula anterior.

Si aplicamos este razonamiento para el resto de filas de la matriz B :

$$S_n=3+3^2+3^3+...+3^n$$

$$-3\cdot S_n=-3^2-3^3-3^4-...-3^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n - 3\,S_n = 3 - 3^{n+1} \;\rightarrow\; -2\,S_n = 3 - 3^{n+1} \;\rightarrow\; S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2} \;\rightarrow\; S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2}$$

Y análogamente para la fila tercera:

$$S_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n$$

$$-4 \cdot S_n = -4^2 - 4^3 - 4^4 - \ldots - 4^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n - 4\,S_n = 4 - 4^{n+1} \;\rightarrow\; -3\,S_n = 4 - 4^{n+1} \;\rightarrow\; S_n = \frac{4^{n+1} - 4}{3} \;\rightarrow\; S_n = \frac{4(4n - 1)}{3}$$

Y la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 2(2n-1) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3(3n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4(4n-1)}{3} \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **hallar** A^n **.**

En primer lugar, vamos a intuir una regla general para la matriz n-ésima:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 160 & 32 \end{pmatrix}$$

Inducimos por tanto que: $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Lo demostramos por inducción matemática:

- Se cumple para $n=1$ $\rightarrow$ $A^1=A=\begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 1\cdot 2^1 & 2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- Supongo cierto el término n-ésimo → $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$
- Demuestro $¿A^{n+1}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)\cdot 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}?$ a partir de A^n y A .

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2^n & 0 \\ 2\cdot n\cdot 2^n+2\cdot 2^n & 2\cdot 2^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)\cdot 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Así queda demostrado por inducción matemática que $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$