Luisa Acuña

A00366200

Hoja de trabajo 2

2.1.3. Las soluciones de los modelos exponenciales cumplen con ciertas regularidades periódicas: pasado un período de tiempo T, la cantidad “actual” se afectará por un factor positivo F_T; esto es: $A(t+T) = F_T A(t)$. Claramente existe una relación entre los valores de k, T y F_T, ¿puede deducirla? (cuando $F_T = 0.5$, a T se le denomina tiempo de vida media del objeto de estudio).

2.1.4. Las ecuaciones lineales ordinarias de primer orden tienen la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

que, bajo ciertas condiciones (¿cuáles?) se pueden reescribir como $y' + p(x)y = f(x)$. Escrita en esta forma “canónica”, es fácil deducir una técnica de solución para la ecuación a partir de calcular la derivada: $\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)$. Asuma como un reto deducir la técnica antes de encontrarla descrita en la literatura.

Desarrollo:

2.1.3 La relación que existe es que cuando se requiere encontrar la ecuación general a partir de una edo, se necesita de un procedimiento que contiene la resolución de nuestra ecuación mediante integrales para poder hallar nuestras constantes de integración y así llegar a nuestro modelo final. Todo es un proceso y todos se complementan de todos.

2.1.4 Las ecuaciones lineales ordinarias de primer orden se pueden reescribir de la forma

$y' + p(x)y = f(x)$. sí y solo si se pueda despejar el diferencial “y”, mediante procesos algebraicos.

Ejercicios sección 1.5

Sección 1.5

27 $(x + ye^y)\frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x)$

$x + ye^y = \frac{dx}{dy}$

$ye^y = \frac{dx}{dy} - x \longrightarrow$ tomamos y como variable independiente

$q(y) = y e^y$

$p(y) = -1$

Solución general de ecuaciones diferenciales

$y\mu = \int q\mu \, dx$

$\mu = e^{\int p(x)dx}$

Reemplazo

$\mu = e^{\int -1 dy} = e^{-y}$

Entonces tenemos

$ye^y = \frac{dx}{dy} - x$

$q(y) = \frac{dx}{dy} + p(y)\, x$

$e^{-y} \cdot ye^y = e^{-y}\frac{dx}{dy} - e^{-y}x$

$y = \frac{d(e^{-y}x)}{dy}$

$$C + \frac{y^2}{2} = e^{-y} x$$

$$x = \left[C e^{y} + \frac{y^2}{2} e^{y} \right]$$

29 $$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \Big\}$$ Función error

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2xy$$

$$q(x) = 1$$

$$p(x) = -2x$$

$$1 = \frac{dy}{dx} - 2xy$$

$$\mu = e^{\int -2x\, dx}$$

$$\mu = e^{-x^2}$$

$$Q(x) = \frac{dy}{dx} + p(x) y$$

$$e^{-x^2} = \frac{dy}{dx} e^{-x^2} - 2xy e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} = \frac{d(e^{-x^2} y)}{dx}$$

$$\int e^{-x^2} = e^{-x^2} y + c$$

$$y = \left(\int e^{-x^2} dx + c\right) e x^2$$

$$y = e^{x^2} \int e^{-x^2} dx + c e^{x^2}$$

En términos de función error

$$y = e^{x^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) + c \right)$$

30.

$$2x \frac{dy}{dx} = y + 2x \cos x \qquad y(1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \cos x$$

$$x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y \right) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^{-\frac{1}{2}} y \right) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$

$$\int \frac{d}{dx} \left(x^{-\frac{1}{2}} y \right) dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \cos x \, dx$$

$$x^{-\frac{1}{2}} y = \int_1^x u^{-\frac{1}{2}} \cos u \, du + c$$

$$\rho(x) = e^{\int_1^x p(u) du}$$

$$\rho(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{2u} du}$$

$$\rho(x) = e^{\left(-\frac{1}{2} \ln u\right)_1^x}$$

$$\rho(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(1)}$$

$$\rho(x) = e^{\ln x^{-1/2}}$$

$$\rho(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Entonces $y(1)=0 \longrightarrow$ Valor inicial

$$(1)^{-\frac{1}{2}}(0) = \int_1^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos(u)\, d + c$$

$0 = 0 + c$

$0 = c$

Entonces

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} \int_1^x u^{-\frac{1}{2}} \cos u \, du$$

38.

a) $\Delta x = g$ entrada $-$ g salida

g Entrada $= \frac{5\ gal}{min} \cdot 0 \cdot \Delta t = 0$

g salida $= \frac{5\ gal}{min} \times \frac{lib}{100\ gal} \cdot \Delta t = \frac{x}{20}\ lib \cdot \Delta t$

$$\Delta x = \left(0 - \frac{x}{20}\right)\Delta t$$

$dx = \frac{-x}{20}\, dt \qquad x(0) = 5.0\ (lib)$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{dt}{20} \longrightarrow \ln x = -\frac{t}{20}$$

$$x = \exp\left(-\frac{t}{20}\right) + C \longrightarrow x = e^{-\frac{t}{20}} C$$

$$50 = e^{-\frac{0}{20}} C \longrightarrow 50 = C$$

$$x = 50\, e^{-\frac{t}{20}}$$

b) $\Delta y = g$ entrada $- g$ salida

g entrada $= \frac{5\ gal}{min} \cdot \frac{x\ lib}{100\ gal} \cdot \Delta t$

g salida $= \frac{5\ gal}{min} \cdot \frac{y\ lib}{200\ gal} \cdot \Delta t$

$$\Delta y = \left(\frac{5\ \cancel{gal}}{min} \cdot \frac{x\ lib}{100\ \cancel{gal}} - \frac{5\ \cancel{gal}}{min} \cdot \frac{y\ lib}{200\ \cancel{gal}} \right) \Delta t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5(\cancel{50}e^{-\frac{t}{20}})}{\cancel{100}} - \frac{5y}{200}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5e^{-\frac{t}{20}}}{2} - \frac{y}{40}$$

$$\frac{5e^{-\frac{t}{20}}}{2} = \frac{dy}{dt} + \frac{y}{40}$$

$q(t) = \frac{5e^{-\frac{t}{20}}}{2}$

$p(t) = \frac{1}{40}$

$$\frac{5e^{-\frac{t}{20}}}{2} \cdot e^{\frac{t}{40}} = e^{\frac{t}{40}} \frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} e^{\frac{t}{40}}$$

$p(t) = e^{\int \frac{1}{40} dt}$

$p(t) = e^{\frac{t}{40}}$

$$\int \frac{5}{2} e^{-\frac{t}{40}} dt = \int d(e^{\frac{t}{40}} y)$$

$$-\frac{5}{2} 40 e^{-\frac{t}{40}} + C = y e^{\frac{t}{40}}$$

$$y = \frac{-100\, e^{-\frac{t}{40}}}{e^{\frac{t}{40}}} + \frac{C}{e^{\frac{t}{40}}}$$

$$y = -100^{-\frac{t}{20}} + Ce^{-\frac{t}{40}}$$

$$50 = -100\, e^{-\frac{0}{20}} + Ce^{-\frac{0}{40}}$$

$$50 = -100 + C$$

$$C = 150$$

$$\boxed{y = -100e^{-\frac{t}{20}} + 150\, e^{-\frac{t}{40}}}$$

c) $y(t) = 150\, e^{-\frac{t}{40}} + 5e^{-\frac{t}{20}}$

$$y'(t) = \frac{15}{4}\, e^{-\frac{t}{40}} + 5\, e^{-\frac{t}{20}}$$

$$0 = \frac{15}{4}\, e^{-\frac{t}{40}} + 5\, e^{-\frac{t}{20}}$$

$$t = -40 \ln\left(\frac{3}{5}\right) = 11,51$$

$$y\,(11,51) = 56,25 \text{ lib}$$

44.
$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$q(x) = x$

$p(x) = -1$

$\mu = e^{\int -1 dx}$

$\mu = e^{-x}$

a) $x = \frac{dy}{dx} - y$

$$x e^{-x} = \frac{e^{-x} dy}{dx} - y e^{-x}$$

$$x e^{-x} = \frac{d(e^{-x} y)}{dx} \rightarrow \int x e^{-x} dx = \int d(e^{-x} y)$$

$$y = \frac{-\cancel{e^{-x}}\, x}{-\cancel{e^{-x}}} - \frac{\cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-x}}} + \frac{C}{e^{-x}}$$

$$y = -x - 1 + \frac{C}{e^{-x}}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$, C se acerca más a 0, lo que implica que $y = -x - 1$

$$C = \frac{y + x + 1}{e^{x}}$$

$y(5) = y_1$

$y_1 = -10$; $C = -0{,}0269$

$y_1 = -5$; $C = 0{,}0067$

$y_1 = 0$; $C = 0{,}0404$

$y_1 = 5$; $C = 0{,}074$

$y = 10$; $C = 0{,}107$

Sección 1.6

Sección 1,6 (30)

jueves, 18 de marzo de 2021 4:21 p. m.

$$(x+e^y)\frac{dy}{dx} = xe^{-y} - 1\frac{e^{-y}}{e^{-y}}$$

$$(x+e^y)\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = e^{-y}(x-e^y)dx$$

$$\left(\frac{x}{e^{-y}} + \frac{e^y}{e^{-y}}\right)dy = (x-e^y)dx$$

$$(xe^y+e^{2y})dy = (x-e^y)dx$$

$$(x-e^y)dx + (-xe^y-e^{2y})dy = 0$$

$$Mdx + Ndy = 0$$

$$M_y = N_x \quad F(x,y) = C$$

$$M = x-e^y \quad N = -xe^y - e^{2y}$$

$$M_y = -e^y \quad N_x = -e^y$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \int M\partial x = \int \partial F$$

$$F = \int x - e^y \, \partial x$$

$$F = \frac{x^2}{2} - e^y x \quad \frac{x^2}{2} - e^y x = C$$

Sección 1,6 (46)

jueves, 18 de marzo de 2021 7:15 p. m.

$$xy'' + y' = 4x$$

$$x\frac{dP}{dx} + P = 4x$$

$$\frac{d(Px)}{dx} = 4x$$

$$\int d(Px) = \int 4x\,dx$$

$$Px = \cancel{4}\frac{x^2}{\cancel{2}}\,2 + C$$

$$P = \frac{dy}{dx} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \frac{C}{x}$$

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{C}{x}\right)dx$$

$$\boxed{y = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + C\ln|x| + C_1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = P$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx}$$

Sección 1,6 (49)

jueves, 18 de marzo de 2021 7:56 p. m.

$$yy'' + (y')^2 = yy'$$

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = yp$$

$$y\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}}\frac{dp}{dy} + \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}} = y\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}}$$

$$\frac{d(yp)}{dy} = y$$

$$\int d(yp) = \int y\,dy$$

$$yp = y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\int \frac{y}{y^2/2 + C_1}\,dy = \int dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int dx$$

$$u = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$du = y\,dy$$

$$\ln\left|\frac{y^2}{2} + C_1\right| = x + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = e^x C_2$$

$$\boxed{\sqrt{y^{\cancel{2}}} = \sqrt{2(e^x C_2 - C_1)}}$$

Sección 1,6 (50)

jueves, 18 de marzo de 2021 8:38 p. m.

$$y'' = (x + y')^2$$

$$\frac{dP}{dx} = (x + P)^2$$

$$\frac{dP}{dx} = v^2$$

$$V = x + P$$

$$\frac{dV}{dx} = \cancel{\frac{dx}{dx}} + \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = v^2 + 1$$

$$\int \frac{dV}{V^2+1} = \int dx$$

$$\tan^{-1}(V) = x + C$$

$$V = \tan(x + C)$$

$$x + P = \tan(x + C)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x + C) - x$$

$$\int dy = \int \tan(x + C) - x\,dx$$

$$\boxed{y = -\ln|\cos(x + C)| - \frac{x^2}{2} + C_1}$$