

Міністерство освіти і науки України
Управління освіти і науки Черкаської облдержадміністрації
Черкаське територіальне відділення
Малої академії наук України

Відділення: Математики
Секція: Математичне моделювання

Задачі Гаспара Монжа та їх дослідження
за допомогою програми GeoGebra

Роботу виконав:

Свояк Михайло Олексійович,
учень 7 класу

Ковтунівського навчально-виховного
комплексу «загальноосвітня школа І-ІІІ
ступенів – дошкільний навчальний
заклад» Новодмитрівської сільської ради
Золотоніськоно району
Черкаської області

Науковий керівник:

Малий Іван Володимирович, учитель
математики Ковтунівського навчально-
виховного комплексу «загальноосвітня
школа І-ІІІ ступенів – дошкільний
навчальний заклад»

Задачі Гаспара Монжа та їх дослідження за допомогою програми GeoGebra,

Свояк Михайло Олексійович

Черкаське територіальне відділення МАН України,

Ковтунівський навчально-виховний комплекс «загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів –

дошкільний навчальний заклад» Новодмитрівської сільської ради

Золотоніського району Черкаської області, 7 клас

Науковий керівник: Малий Іван Володимирович, вчитель математики

Ковтунівського навчально-виховного комплексу

Робота присвячена розгляду задач (теорем), які сформулював та довів видатний французький математик Гаспар Монж.

Основна мета виконання роботи полягала в розробці за допомогою програми GeoGebra моделей до задач, які можна розв'язати способом побудови геометричних фігур та дослідженні особливостей окремих елементів при зміні вихідних параметрів.

Завдання наукового дослідження передбачало ознайомлення із біографією Гаспара Монжа, його науковою діяльністю, задачами (теоремами), які носять його ім'я; навчання роботі з програмою динамічної геометрії GeoGebra.

У геометрії коло відіграє важливу роль. Існує навіть окрема частина геометрії – геометрія кіл, у якій досліджуються важливі й цікаві властивості геометричних фігур, пов'язаних із колом. Кожен любитель геометрії кола (круга) має можливість відкрити щось нове і поповнити її скарбницю власною розробкою, бо геометрія воістину невичерпна.

Робота може бути цікава як учителям так і учням, її можна використовувати в якості наочного посібника на уроках геометрії, факультативних заняттях з математики або на курсах за вибором у середній школі. Побудовані моделі можна використовувати для демонстрації роботи з програмою Geogebra, вести пошук закономірностей у розміщенні елементів кіл (кругів), встановлювати зв'язки між їх метричними мірами.

Ключові слова: Задачі (теореми) Гаспара Монжа.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	5
1.1. Історична довідка	5
1.2. Планіметричні задачі Гаспара Монжа	6
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ	9
РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ	11
3.1. Моделі до задачі 1 про зовнішні дотичні трьох кіл	11
3.2. Модель до задачі 2 про перпендикуляри із середин сторін вписаного чотирикутника до протилежних сторін	12
3.3. Модель до задачі 3 про хорди трьох кіл	12
3.4. Моделі, які пов'язують із задачами Гаспара Монжа	13
3.4.1. Модель до задачі про дві пари внутрішніх дотичних та пару зовнішніх дотичних	13
3.4.2. Модель до задачі про очні яблука	13
3.4.3. Модель до задачі про хорди, утворені дотичними	14
4. Використання моделей для створення умов нових задач	14
ВИСНОВКИ.....	15
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	16
ДОДАТКИ	17

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі про кола та пов'язані з ними елементи займають велике місце в планіметрії і вражають певними властивостями, які залишаються незмінними при зміні радіусів кіл чи/або розташування центрів кіл. Наявні сучасні комп'ютерні програми дають змогу значно спростити пошук розв'язків та сприяють появі нових математичних гіпотез.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи було створення динамічних моделей, пов'язаних із задачами Гаспара Монжа, за допомогою програми динамічної математики GeoGebra.

Для досягнення поставленої мети вирішувались наступні завдання:

Опрацювати наявний матеріал (теоретичний, демонстраційний) щодо задач (теорем) Монжа.

Навчитися працювати з програмою GeoGebra, яка полегшує створення математичних моделей, які дозволяють проводити інтерактивні дослідження при переміщенні об'єктів і зміні параметрів.

Побудувати моделі, що демонструють залежність між елементами в задачах Монжа.

Дослідити особливості окремих елементів при зміні вихідних параметрів.

Об'єкт дослідження: Задачі Гаспара Монжа

Предмет дослідження: Особливості розміщення внутрішніх та зовнішніх дотичних до кіл, розміщення їх точок перетину, співвідношення між хордами кіл, практичне застосування властивостей (тверджень), що впливають із задач.

Методи дослідження: теоретичний, порівняння та аналіз графічних даних.

Наукова новизна дослідження: За допомогою програми Geogebra створено динамічні моделі, що наочно демонструють зміст задач Гаспара Монжа.

Практичне значення одержаних результатів: Побудовані моделі дають можливість демонструвати роботу з програмою Geogebra, вести пошук закономірностей у розміщенні елементів кіл (кругів), встановлювати зв'язки між їх метричними мірами.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Історична довідка.

Гаспар Монж – французький математик, державний діяч. Це ім'я відоме кожному освіченому інженеру, техніку, архітектору — кожному, хто має справу з технічним проектом і технічним кресленням взагалі. Монж обезсмертив своє ім'я, створивши сучасні методи проєкційного креслення і «накреслювальну геометрію», що лежить в їх основі.

Гаспар Монж – одна з найяскравіших постатей, висунутих на історичну сцену Французькою буржуазною революцією, яка й досі захоплює нас своєю драматичною насиченістю.

Гаспар Монж народився 10 травня 1746 р. в невеликому містечку Боні на сході Франції в родині місцевого торговця. Він був старшим з п'яти дітей, яким батько, незважаючи на низьке походження і відносну бідність сім'ї, постарався забезпечити найкращу освіту з доступного в той час для вихідців з незнатного стану. Його другий син, Луї, став професором математики і астрономії, молодший - Жан також професором математики, гідрографії і навігації.

В 1770 у віці 24 років Монж займав посаду професора одночасно за двома кафедрами – математики і фізики, і, крім того, вів заняття з різання каменів. Почавши з задачі точного різання каменів за заданими ескізами стосовно до архітектури та фортифікації, Монж прийшов до створення методів, узагальнених ним згодом в новій науці – нарисній геометрії, творцем якої він по праву вважається. Враховуючи можливість застосування методів нарисної геометрії в військових цілях при будівництві укріплень, роботи Монжа вважались державною таємницею Франції і відкрито не публікувались аж до 1799 року.

Крім основ нарисної геометрії Монж розробляв і інші математичні методи, займався вивченням різних станів заліза, проводив дослідження над капілярністю, робив спостереження над оптичними явищами, працював над побудовою теорії головних метеорологічних явищ.

Незважаючи на надзвичайну зайнятість наукою, Гаспар Монж був активним громадським діячем. Значний період його життя припав на Французьку революцію,

що проголосила соціальну справедливість і рівність. У ті роки відбулася найбільша трансформація соціальної та політичної систем Франції, в результаті якої Франція з монархії стала республікою. Гаспар Монж займався зміцненням морських кордонів Франції і організував дванадцять шкіл для підготовки фахівців-гідрографів. У 1792 р був призначений морським міністром.

У ролі голови Тимчасової виконавчої ради він підписав вирок про страту Людовика XVI і оголошення війни Англії. Небагатьом вченим вдавалося брати участь у прийнятті настільки знакових політичних рішень. Але академік Монж недовго займався адміністративною діяльністю. Головні сили він віддавав організації ливарних майстерень та поліпшення технології виготовлення рушниць.

Гаспар Монж був наближеною особою до Наполеона Бонапарта, який високо цінував його. Імператор призначив Монжа довічним сенатором, нагородив орденом Почесного легіону та титулом графа. Але стан здоров'я вченого погіршувався. Він припинив викладання, але продовжив наукові роботи, в тому числі про можливість десанту в Англію на 100 великих аеростатах.

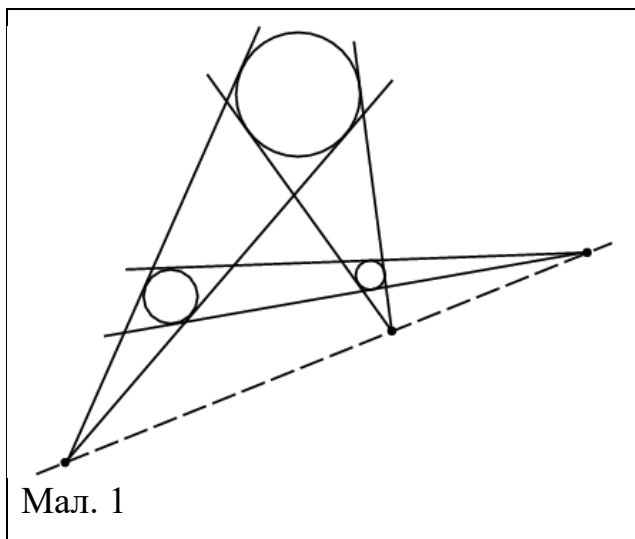
Після падіння Наполеона Монж позбувся звань, нагород та пенсії. Останні роки свого життя змушений був прожити в бідності і забутті. Помер 28 липня 1818 року.

Ім'я Гаспара Монжа внесено в список 72 найбільших вчених Франції, поміщений на першому поверсі Ейфелевої вежі. На його честь названо астероїд 28766 Монж та кратер на видимому боці Місяця. [2, 3, 4, 5, 6]

1.2. Планіметричні задачі Гаспара Монжа

Найбільша популярність Гаспаром Монжом здобута завдяки працям у нарисній геометрії та стереометрії. Проте і серед задач, які розглядаються в курсі планіметрії, є задачі, які сформульовані та розв'язані французьким математиком. Дані про задачі розрізнені. Авторство встановити складно. Фактично в наукових джерелах мова йде лише про три задачі.

Задача 1. Для будь-яких трьох кіл на площині, жодне з яких не знаходиться всередині інших, точки перетину трьох пар зовнішніх дотичних лежать на одній прямій. [1, 4, 7]

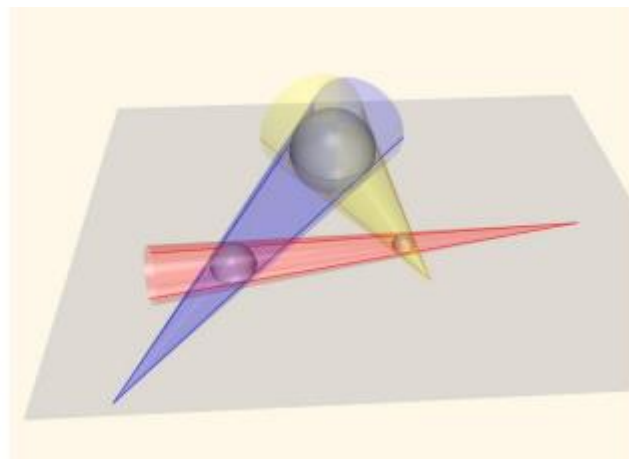
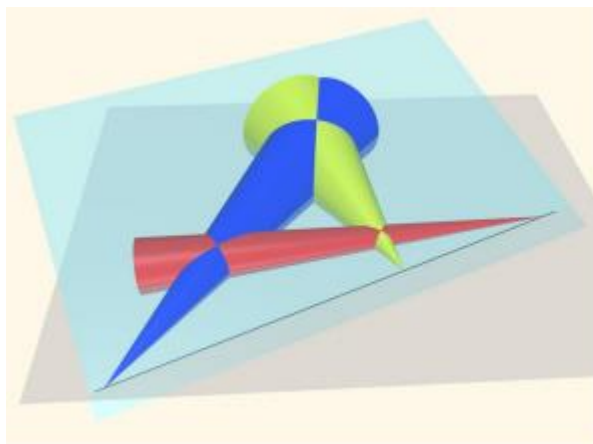


Мал. 1

Ця задача є найбільш відомою в Гаспара Монжа. Її можна знайти в багатьох посібниках та Інтернет-виданнях. Цікаві доведення зроблено учнями Подільського науково-технічного ліцею для обдарованої молоді з Вінницької області. [7]

Коли демонструють розв’язок даної задачі, то показують не лише засоби

планіметрії, які можуть бути складними, бо вимагають знань додаткових теорем. Існує досить цікаве «стереометричне» доведення даної теореми.

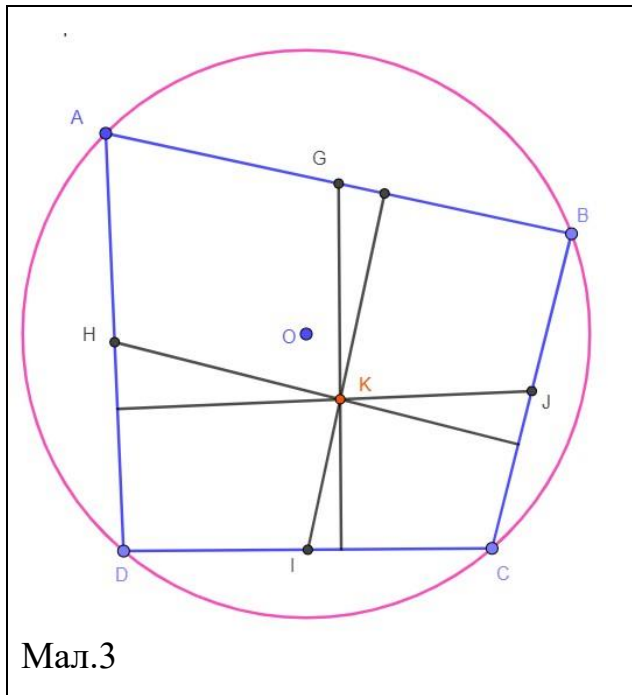


Мал.2

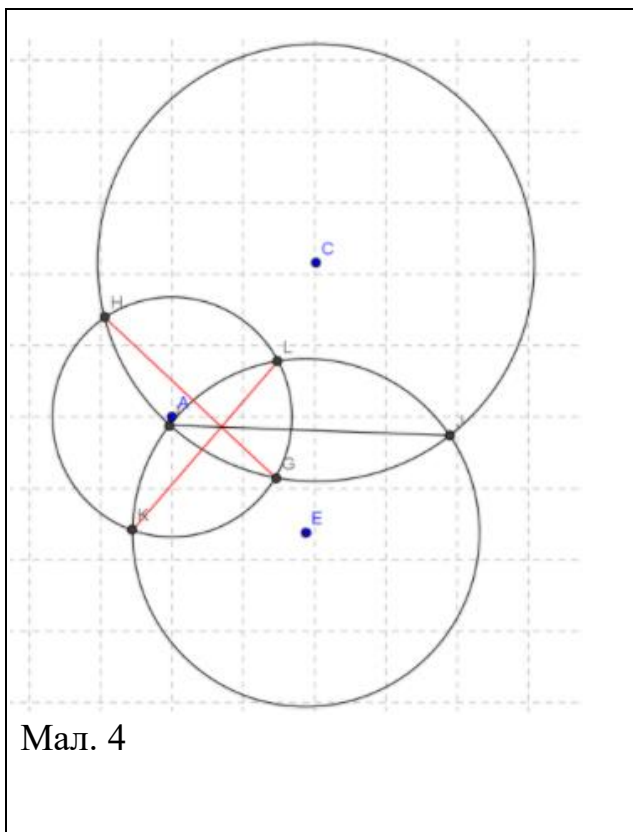
Нехай три кола відповідають трьом сферам різного радіуса. Кола відповідають екваторам, які є результатом площини, що проходить через центри сфер. У конусах, які попарно охоплюють сфери, будуть дотичні, що розглядаються в задачі.

Покладемо на конуси площину. Верхні твірні конусів попарно перетинаються і визначають площину. Точки, які нас цікавлять – вершини конусів – належать як і цій площині, так і початковій площині, в якій лежать наші кола. А дві непаралельні площини завжди перетинаються по прямій. Отже, ці три точки – точки перетину попарних дотичних до трьох довільних кіл, лежать на одній прямій.

Задача 2. Перпендикуляри, опущені з середин сторін чотирикутника, вписаного в коло, на протилежні сторони, перетинаються в одній точці. [4]



На малюнку 3 зображено опуклий чотирикутник ABCD, вписаний у коло. Точки G, J, I, H – середини його сторін AB, BC, CD і DA. Перпендикуляри перетинаються в точці K.



Задача 3. (Малюнок 4) Нехай на площині дано три кола, які мають спільні точки (всі три). Тоді хорди кожної пари кіл, що з'єднують загальні точки цієї пари, перетинаються в одній точці. [4]

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для проведення дослідження задач Гаспара Монжа та пошуку нових властивостей обрано програму GeoGebra, що являє собою інтерактивне творче середовище, засноване на принципах динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри, призначене для створення інтерактивних моделей з математики, що поєднують в собі моделювання та експеримент. Кожна модель – це динамічний образ, що являє собою геометричне зображення, яке ілюструє або описує те чи інше поняття. Є можливість змінювати деякі їх параметри (вільні) та слідкувати за тим, як при цьому будуть змінюватись інші (залежні).

Автором програми є австрійський математик Маркус Хогенвартер, який почав її розробку в 2001 році. Зараз GeoGebra доступна для багатьох платформ. Вона має багатомовний інтерфейс, у тому числі український. Програмний засіб постійно вдосконалюється. Він є безкоштовним та вільно розповсюджуваним. Програму можна завантажити на сайті: <http://www.geogebra.org>. При наявності доступу до мережі Інтернет з програмою можна працювати безпосередньо на сайті, завантаживши потрібний додаток. За таких обставин є вільний доступ до ресурсів, створених науковою спільнотою.

Вікно програми, яке відкривається після запуску, має наступний вигляд. (Мал.5)

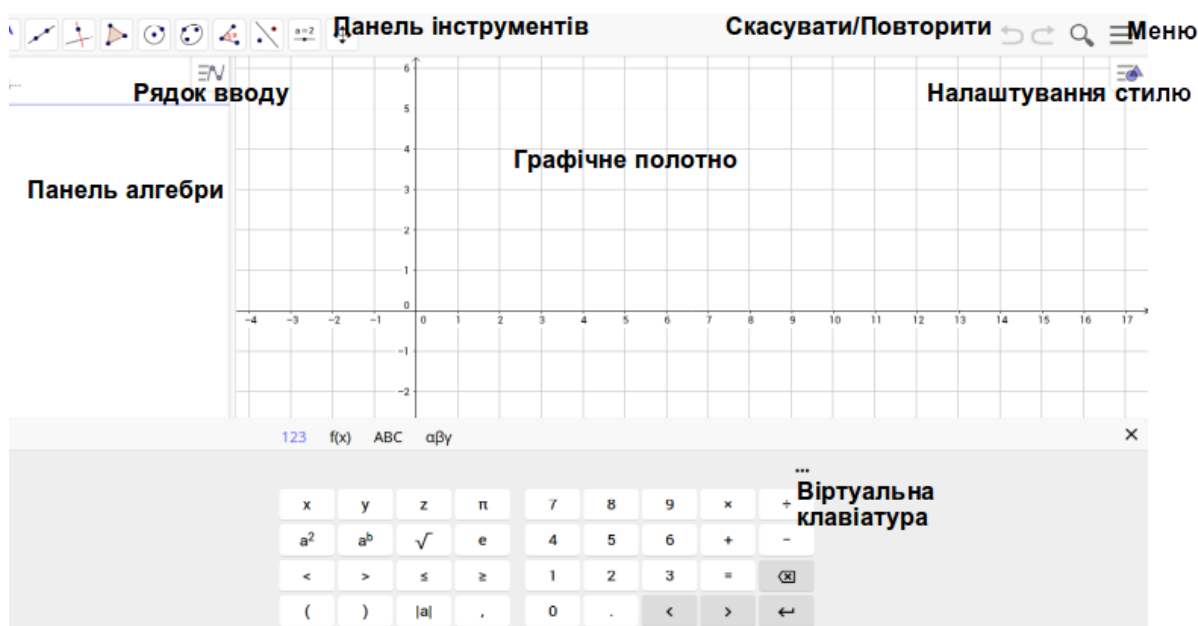


Рис.5

Призначення кожної області у цьому вікні наступні:

Меню, налаштування стилю – вибір основних функціональних можливостей програми.

Панель алгебри (об'єктів) – область, у якій записуються в алгебраїчному вигляді всі об'єкти, створені на полотні (навіть приховані). Вона дозволяє переглянути (відкрити чи закрити) список команд.

Панель інструментів – набір кнопок швидкого доступу до інструментів створення геометричних конструкцій в графічному вікні, які дозволяють виконувати побудову об'єктів за допомогою миші.

Скасування/повторення – дві кнопки: одна дозволяє скасувати останню дію, нижня – повернути скасовану.

Графічне полотно – основна область, у якій створюються об'єкти.

Рядок вводу – поле для вводу алгебраїчних рівнянь, що задають геометричне місце точок і відображаються на панелі об'єктів та полотні.

Віртуальна клавіатура дозволяє вводити специфічні математичні формули.

За допомогою наданих засобів панелі інструментів можна створювати геометричні побудови на графічному полотні за допомогою миші. У той же час відповідні координати і рівняння, які описують створені об'єкти, генеруються в алгебраїчному поданні. Крім того, можна безпосередньо ввести алгебраїчні дані, команди і функції в рядку введення з допомогою клавіатури.

Є ще можливість відкрити панелі Електронної таблиці, Системи Комп'ютерної Алгебри (СКА), та додаткові Графічні поля (для 3D, тощо). Ці різні панелі можуть бути показані або приховані за допомогою меню Налаштування. [8,9]

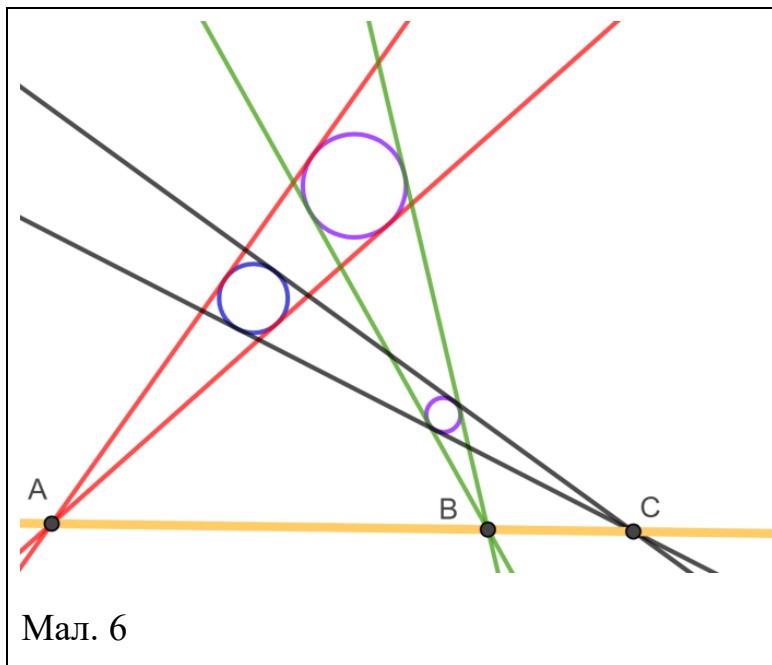
Система динамічної математики GeoGebra використовується при вивченні математики, фізики та інших навчальних дисциплін у середніх та вищих навчальних закладах багатьох країн світу: Австрії, Польщі, Німеччині, Великобританії, Канаді, США, Італії, Іспанії, Норвегії, Фінляндії, Швеції, Австралії.

Отже, програма GeoGebra є інструментом, який дозволяє створювати моделі до задач та проводити експерименти з ними. Це значно спрощує розуміння математичних задач.

РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У ході дослідження було створено моделі, які пов'язують з іменем Гаспара Монжа. Задачі розміщено на власній сторінці автора на офіційному сайті програми Геогейбра.

3.1. Моделі до задачі 1 про зовнішні дотичні трьох кіл (Малюнок 6, електронні додатки 1 і 2)



Модель можна переглянути на сторінці автора за посиланням <https://www.geogebra.org/m/tkwab9gh>

Зауваження. Для будь-яких двох кіл на площині зовнішня дотична — це лінія дотична до обох кіл, але яка не проходить між ними. Для будь-яких двох кіл є дві такі зовнішні дотичні лінії.

Якщо два кола однакового розміру, тоді їхні зовнішні дотичні

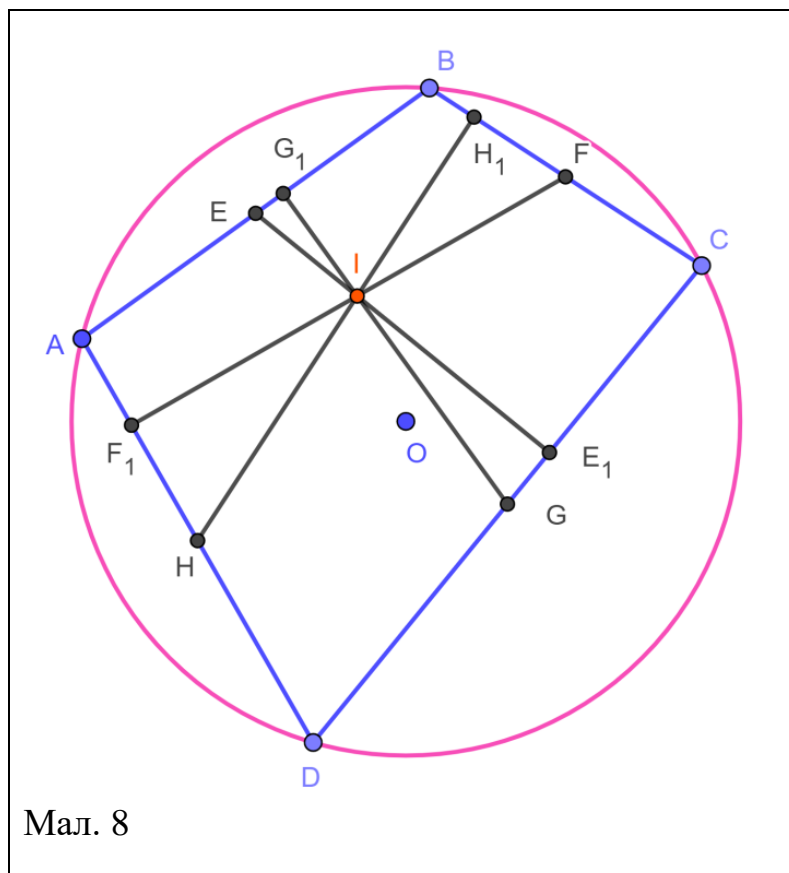
паралельні.

Змінюючи розташування кіл за допомогою переміщення їх центрів можна відстежувати розміщення точок А, В і С.

Друга модель, пов'язана із зміною радіусів кіл. Її можна переглянути на сторінці автора за посиланням <https://www.geogebra.org/m/xkgfumwe>

Модель анімована і запускається за допомогою кнопки програвання повзунка. Також є можливість самостійно змінювати величини радіусів кіл.

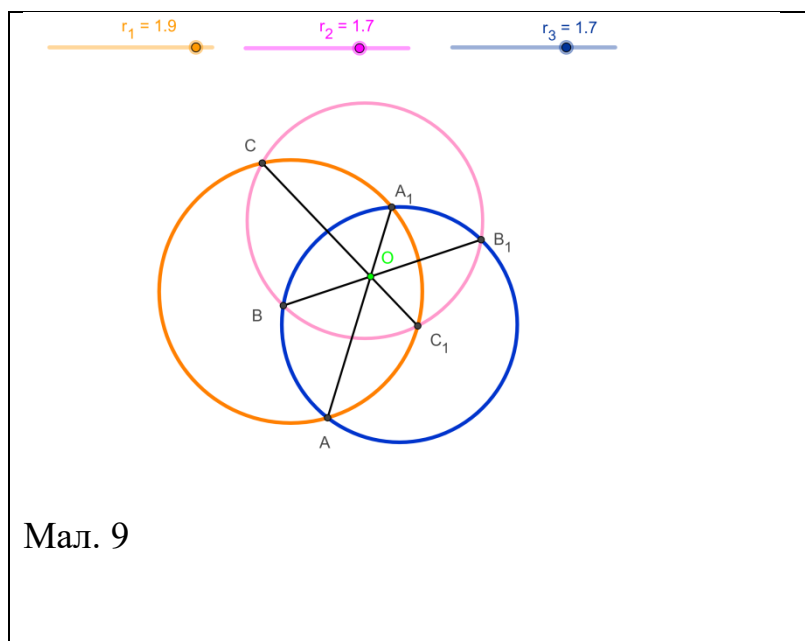
3.2. Модель до задачі 2 про перпендикуляри із середин сторін вписаного чотирикутника до протилежних сторін (Малюнок 8, електронний додаток 3)



Модель можна переглянути на сторінці автора за посиланням <https://www.geogebra.org/m/crhfhvmq>

Змінюючи вид чотирикутника за допомогою «рухомих» точок А, В і С можна відстежувати перетин перпендикулярів EE_1 , FF_1 , GG_1 та HH_1 .

3.3. Модель до задачі 3 про хорди трьох кіл (Малюнок 9, електронний додаток 4)



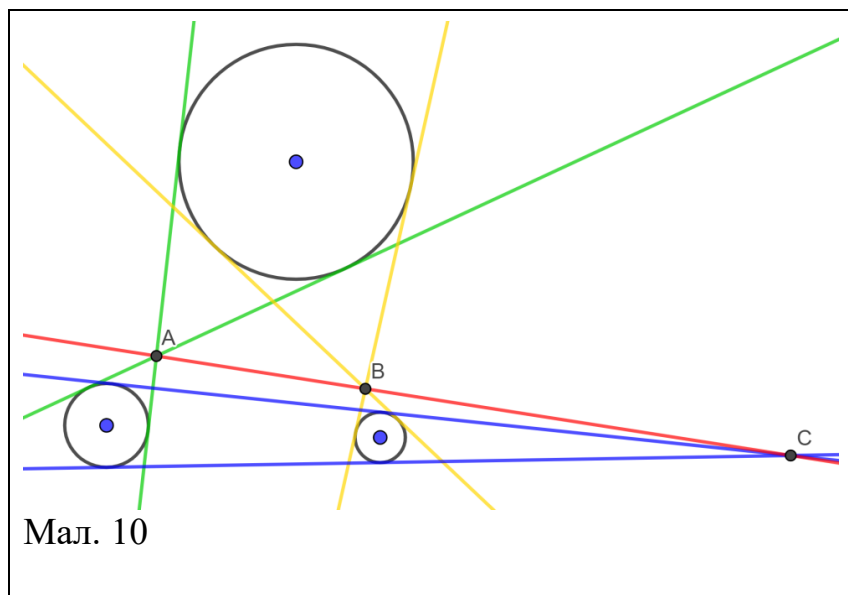
Модель можна переглянути на сторінці автора за посиланням <https://www.geogebra.org/m/qdbkb35q>

Модель анімована за допомогою повзунка, який можна запускати (зупиняти). Є можливість відстежувати розміщення хорд.

3.4. Моделі, які пов'язують із задачами Гаспара Монжа

Автори окремих джерел наводять ще декілька задач, які дуже схожі на задачі, які сформулював французький математик. Є велика ймовірність того, що Монж розглядав їх, бо вони в певній мірі подібні за умовою і також вражають своїми закономірностями.

3.4.1. Модель до задачі про дві пари внутрішніх дотичних та пару зовнішніх дотичних. (Малюнок 10, електронний додаток 5)



Мал. 10

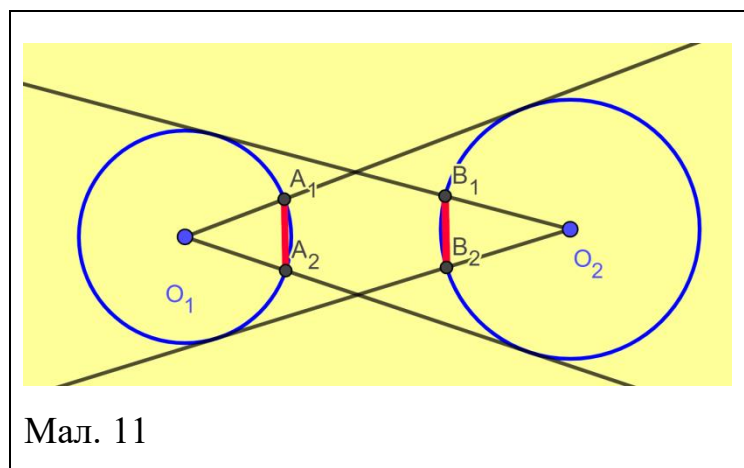
Дві пари внутрішніх дотичних та пара зовнішніх дотичних перетинаються в точках, які лежать на одній прямій.

Модель можна переглянути на сторінці автора за посиланням <https://www.geogebra.org/m/aa>

[ywjrxu](#)

Модель анімована за допомогою повзунка, який можна запускати (зупиняти). Є можливість відстежувати розміщення точок перетину дотичних.

3.4.2. Модель до задачі про очні яблука. (Малюнок 11, електронний додаток 6)

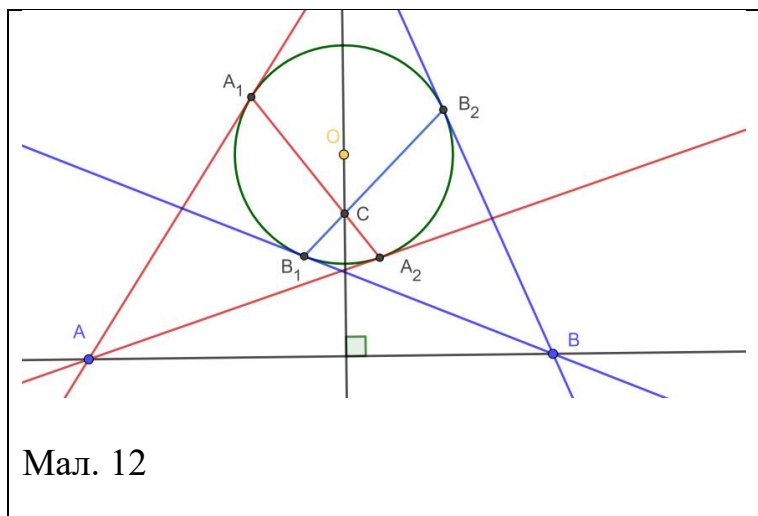


Мал. 11

Є два кола, які не перетинаються. З центра кожного з них до другого кола проведено дотичні, які при перетині із «своїм» колом утворюють хорди A_1A_2 та B_1B_2 . Встановити співвідношення між хордами.

Змінюючи радіуси кіл, можна відстежувати величини відрізків A_1A_2 та B_1B_2 . Вони будуть рівними.

3.4.3. Модель до задачі про хорди, утворені дотичними. (Малюнок 12, електронний додаток 7)



Мал. 12

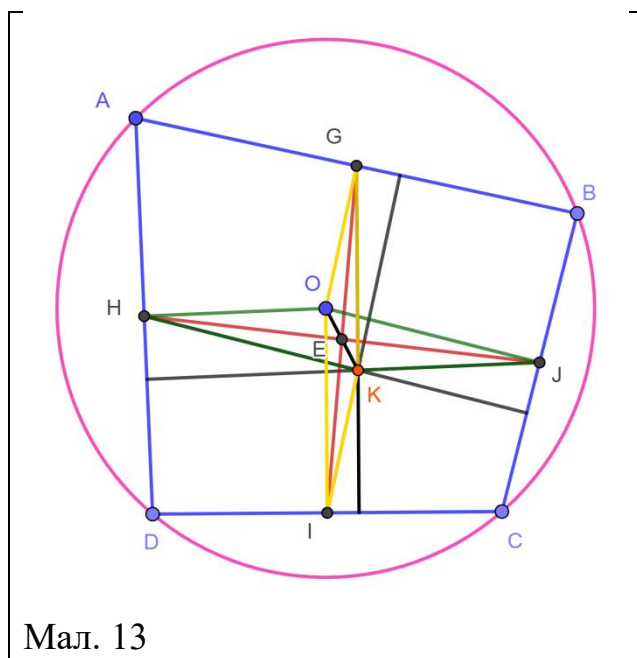
З двох точок A і B до кола проведено дотичні. Хорди A_1A_2 та B_1B_2 , утворені точками дотику перетинаються в точці C . Пряма, яка проходить через центр кола і точку C буде перпендикулярна до прямої AB .

Змінюючи розташування

точок A і B або центра O , можна продемонструвати властивість прямої OC .

4. Використання моделей для створення умов нових задач.

Під час аналізу задачі про перпендикуляри із середин сторін вписаного чотирикутника до протилежних сторін було створено модель, яку можна використати для створення декількох умов нових задач, оскільки виявлено деякі співвідношення між наявними елементами. (Малюнок 13, електронний додаток 8)



Мал. 13

Вихідні дані: Чотирикутник,

вписаний в коло з центром в точці O .

З точок G, J, I, H – середин сторін AB, BC, CD і DA проведено перпендикуляри до протилежних сторін.

Є можливість досліджувати розміщення точки K (точки перетину перпендикулярів), точки O (центра кола) та точки E (точки перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін).

ВИСНОВКИ

Під час роботи автор ознайомився з біографією французького математика та громадського діяча Гаспара Монжа, опрацював його відомі планіметричні задачі та розробив динамічні моделі до них.

Автор навчився працювати з програмою динамічної математики GeoGebra, використовувати її можливості не лише створювати інтерактивні моделі, а і проводити різні експерименти, що значно спрощує пошук нових закономірностей в розташуванні математичних об'єктів для математиків-теоретиків.

Побудовані за допомогою системи динамічної математики GeoGebra інтерактивні моделі підтверджують правильність тверджень та дозволяють наочно продемонструвати графічні розв'язки задач (теорем), які сформулював Монж.

Моделі можна використовувати не лише для демонстрації зазначених математичних фактів, а й вести пошук нових властивостей.

Новизна роботи полягає насамперед в тому, що зроблено моделі, до планіметричних задач, які можуть розглядатись під час виконання задач на побудову або під час пошуку закономірностей між елементами кіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акопян А.В. Геометрия в картинках. – Москва, 2011.
2. Гаспар Монж. Вільна енциклопедія [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://wikizero.com/uk/>
3. «Гаспар Монж». Сборник статей к двухсотлетию со дня рождения. Под ред. академика В. И. Смирнова Изд-во Академии Наук СССР, Л., 1947г. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.mathedu.ru/text/gaspar_monzh_1947/p0/
4. Гаспар Монж и его теоремы, [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://hijos.ru/2012/04/18/gaspar-monzh-i-ego-teoremy/>
5. Дем'янов Ст. Геометрія і Марсельєза. – Москва: Знання. 1969 р.
6. Лариошина, Д. А. Гаспар Монж и его роль в становлении начертательной геометрии как науки [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/directions.html>
7. Окремі теореми геометрії про колінеарність трьох точок на площині та їх застосування при розв'язуванні задач, [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/30302>
8. Порхун А. О. Створення інтерактивних моделей у середовищі Geogebra. Онлайн-посібник. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://geogebra-geometry.blogspot.com/p/geogebra-geogebra_18.html
9. Ракута В. М. GeoGebra 5.0 для вчителів математики. Планіметрія: Навч. посіб. /В. М.Ракута – Чернігів: ЧОШПО ім. К. Д. Ушинського, 2019.

ДОДАТКИ

№	Назва	Посилання
1	Модель 1 до задачі про зовнішні дотичні трьох кіл (рухомі центри кіл)	https://www.geogebra.org/m/tkwab9gh
2	Модель 2 до задачі про зовнішні дотичні трьох кіл (змінні радіуси)	https://www.geogebra.org/m/xkgfumwe
3	Модель 3 до задачі про перпендикуляри із середин сторін вписаного чотирикутника до протилежних сторін	https://www.geogebra.org/m/crhfhvmq
4	Модель 4 до задачі про хорди трьох кіл	https://www.geogebra.org/m/qdbkb35q
5	Модель 5 до задачі про дві пари внутрішніх дотичних та пару зовнішніх дотичних	https://www.geogebra.org/m/aaywjrxy
6	Модель 6 до задачі про очні яблука	https://www.geogebra.org/m/wsd6qm4c
7	Модель 7 до задачі про хорди, утворені дотичними	https://www.geogebra.org/m/fphhdsff
8	Модель 8 для створення умов нових задач	https://www.geogebra.org/m/fwtqzuaj