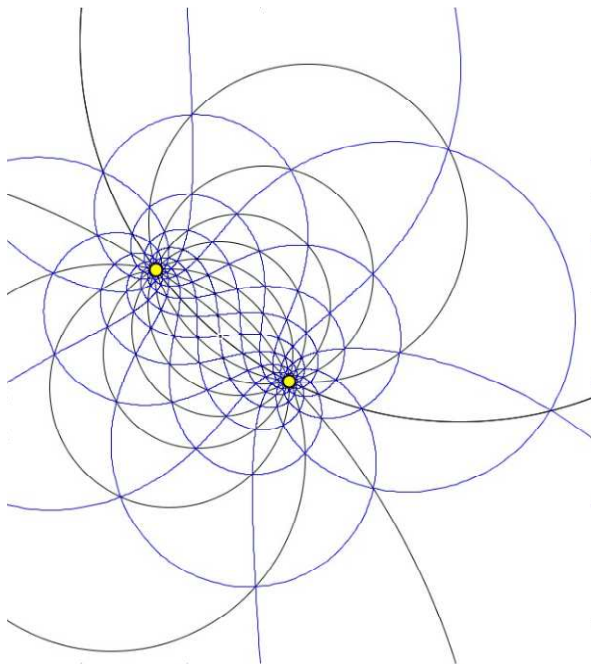


Ebene Möbiusgeometrie*

von Walter Füchte

Juni 2016



*Der zugrundeliegende Körper ist $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, d.h. es geht um die als Gaussche Zahlenebene bekannte Möbiusebene.

1

auch für komplex differenzierbare Kurven, also für analytische Funktionen.

Mit Hilfe der Berührgeradenvektoren können *Tangentialfelder* der Möbiusebene beschrieben werden.

- Die Geradenvektoren $g \in \mathcal{G}$ mit $g^2 \in \mathbb{R}$ können als *Kreisbüschel* gedeutet werden; zu $e^{i\varphi} \cdot g$ gehören die Loxodrome des Kreisbüschels zum Winkel φ , s.u..
- Die Vektoren $g \in \mathcal{G}$ können als *infinitesimale Erzeugende* der Einparameteruntergruppen $\exp t \cdot \text{ad}_g$ der Möbiusgruppe aufgefasst werden, mit $\omega(g) = [g, g]$, hierbei kann der Parameter reell oder komplex sein. Die Bahnkurven auf der Möbiusquadrik sind die zu g gehörenden Kreisbüschel bzw. Loxodrome.

Beispiel: durch $g \cdot h = 1$ mit $g \in \mathcal{G}$ beliebig und $h \in \mathcal{G}$, $h^2 = 0$ wird ein lineares Vektorfeld definiert, die Integralkurven sind die zur infinitesimalen Erzeugenden g gehörenden Bahnkurven.

2 Hermitesche Abbildungen I: Kreisspiegelungen und Untergeometrien

Hermitesche Abbildungen sind von zentraler Bedeutung in der Möbiusebene: es sind dies die reell-linearen Abbildungen $H \in \mathcal{H}$ mit $Hg = \bar{c}Hg$, $c \in \mathbb{C}$ und $Hg = \bar{g}$ $H\bar{g}$.

Kreisspiegelungen (Inversionen) sind die hermiteschen Abbildungen $K \in \mathcal{H}$ mit $K^2 = \text{id}$. Eine Spiegelung K zerlegt den Geradenraum in $\mathcal{G} = K \oplus iK$ mit $Kg = g$ und $Kig = -ig$ für $g \in K$. K besteht aus den Geraden, die im V_4 in der Ebene des Kreises liegen, und ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$. Die Geraden aus iK gehen im V_4 durch den den Kreis repräsentierenden Punkt. Je nach Lage des Kreises erhält man eine hyperbolische oder elliptische Ebene. Die Vektoren aus $p \in iK$ können als Punkte, die Vektoren $g \in K$ als Geraden gedeutet werden, p liegt auf g , wenn $p \cdot g = 0$ gilt, $p = ig$ ist der Pol von g ; g_1 und g_2 sind orthogonal, wenn $g_1 \cdot g_2 = 0$ gilt; $\{p_1, p_2\}$ ist die Verbindungsgerade der Punkte p_1 und p_2 .

Die Kreisgleichung erhält man, allerdings doppelt gezählt, durch $Kh \cdot h = 0$ für Berührgeradenvektoren $h \in \mathcal{G}$. Die euklidische, bzw. die Ähnlichkeitsebene ergibt sich durch Auszeichnung eines Berührgeradenvektors h_∞ : $\mathcal{L} = \{g \in \mathcal{G} \mid h_\infty \cdot g = 0\}$ ist die Lie-Algebra der Ähnlichkeitsgruppe, $\mathcal{L}_{\text{aff}} = \{g \in \mathcal{G} \mid h_\infty \cdot g = 0, g^2 \geq 0\}$ ist die der euklidischen Ebene.

3 Übertragungssprinzip, euklidisches Koordinatensystem

3 Vektoren $h_\infty, g_0, h_0 \in \mathcal{G}$ mit $\det(h_\infty, g_0, h_0) = 1$ heißen *euklidisches Koordinatensystem*, wenn folgende Beziehungen gelten:

$\bullet$	h_∞	g_0	h_0
h_∞	0	0	1
g_0	0	-1	0
h_0	1	0	0

und

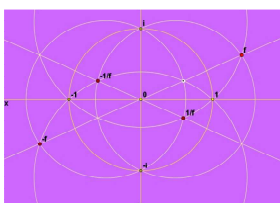
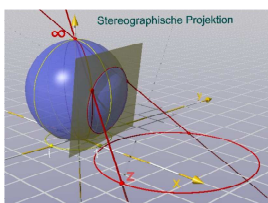
$\bullet$	h_∞	g_0	h_0
h_∞	0	h_∞	g_0
g_0	$-h_\infty$	0	h_0
h_0	$-g_0$	$-h_0$	0

Die Berührgeradenvektoren können nun komplex parametrisiert werden:

$$h(z) := \frac{1}{z} h_\infty + z \cdot g_0 + h_0 \text{ mit } z \in \mathbb{C}.$$

Wegen $h_\infty \cdot h(z) = 1$ ist hiermit zugleich ein lineares Vektorfeld $z \mapsto \frac{1}{z}$ erklärt.

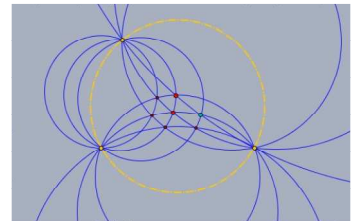
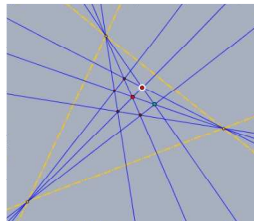
Die Gerade $g(z) := z \cdot h_\infty + g_0$ ist die Projektionsgerade der stereographischen Projektion durch $\infty \equiv h_\infty$.



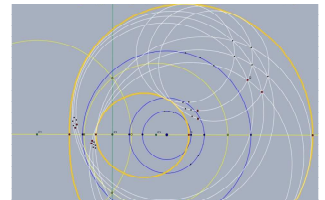
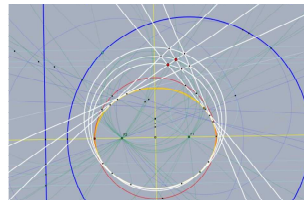
3

1 Grundlagen: der Geradenraum als Modell der Möbiusebene

Ausgangspunkt war das von W. BLASCHKE 1938 gestellte Problem, alle 6-Ecknetze aus Kreisscharen zu finden.



In meiner Diss. von 1982 habe ich die Antwort für Kreisbüschel gegeben. Unten: 6-Ecknetze aus Kreisen, die eine bizirkuläre Quartik doppelt berühren



Die Fragestellung lässt sich meines Erachtens besonders zugänglich im Geradenraum $\mathcal{G} = \bigwedge_2 V_4$ über dem reellen, mit der Möbiusform - der Signatur $(+, +, +, -)$ versehenen Vektorraum V_4 behandeln.

In $\mathcal{G}$ sind 2 quadratische Formen gegeben: die induzierte Möbiusform $m_2(a \wedge b, c \wedge d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}$ und die Plückerform $p(a \wedge b, c \wedge d) = \det(a, b, c, d)$.

Mit der zwischen den Formen vermittelnden, durch $m_2(g_1, g_2) = p(g_1, Ig_2)$ erklärten selbstadjungierten Abbildung I wird $\mathcal{G}$ zu einem komplexen 3-dimensionalen Vektorraum mit nicht ausgearteter quadratischer Form: $(\alpha + i\beta) \cdot g = \alpha g + \beta Ig$ und $g_1 \cdot g_2 = m_2(g_1, g_2) + i \cdot p(g_1, g_2)$.

Für Geraden repräsentierende Vektoren $g \in \mathcal{G}$ gilt $g^2 \in \mathbb{R}$ und zwar ist g eine die Möbiusquadrik vom Typ der Kugel schneidende (berührende, außerhalb liegende) Gerade, wenn $g^2 < 0$ ($g^2 = 0$, $g^2 > 0$) gilt. Die Ebenen durch g schneiden die Möbiusquadrik dann in einem hyperbolischen (parabolischen, elliptischen) Kreisbüschel. Die komplexe Version des Kreuzprodukts, hier mit den Lie-Klammern bezeichnet: $[g_1, g_2]$ macht $\mathcal{G}$ zur Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ der Gruppe der ebenen Möbius-Abbildungen, die sich in dieser Realisierung als komplexe $SO(3, \mathbb{C})$ erweist.

Wir meinen, dass sich der Geradenraum wegen der vielfältigen Deutungsmöglichkeiten seiner Objekte sehr gut für die Darstellung der ebenen Möbiusgeometrie eignet:

- Die Berührgeradenvektoren $h \in \mathcal{G}$ mit $h^2 = 0$ sind Repräsentanten der *Möbiuspunkte*.
- Als reelle Vektoren können Berührgeradenvektoren als *Tangentialvektoren* aufgefasst werden: eine differenzierbare Kurve $h(t)$ ist tangential an eine Kurve auf der Möbiusquadrik im V_4 , wenn $h'(t)^2 < 0$ gilt, dies gilt

2

4 Die Lage von vier Möbiuspunkten

Vier verschiedene Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 , repräsentiert durch 4 Berührgeradenvektoren h_1, h_2, h_3, h_4 können auf 3 wesentlich verschiedene Weisen verbunden werden: $g_{12} = \frac{h_2 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_2}$ und $g_{34} = \frac{h_4 \cdot h_3}{h_3 \cdot h_4}$, bzw. $g_{13} = \frac{h_3 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_3}$ und $g_{24} = \frac{h_4 \cdot h_2}{h_2 \cdot h_4}$, bzw. $g_{23} = \frac{h_3 \cdot h_2}{h_2 \cdot h_3}$ und $g_{14} = \frac{h_4 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_4}$.

4 verschiedene Punkte sind in Abhängigkeit von der Reihenfolge möbiusgeometrisch durch ihr Doppelverhältnis $d = D(p_1, p_2, p_3, p_4)$ charakterisiert.

Nun gilt $g_{12} \cdot g_{34} = \frac{d-1}{d+1}$, $g_{23} \cdot g_{14} = 2d - 1$ und $g_{13} \cdot g_{24} = \frac{d-1}{d+1}$. Die absolute Invariante $J = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{d-1}{d+1} \right)^2 \cdot (2d-1)^2$ kennzeichnet möbiusgeometrisch die Lage der 4 Punkte. Ist $J \geq 0$, so sind die Punkte konzyklisch, ist $J \leq 0$, so liegen die Punkte bei geeigneter Paarbildung spiegelbildlich auf 2 orthogonalen Kreisen, es ist dann übrigens $|d| = 1$. Für $J = 0$ trifft beides zu, die Punkte trennen sich harmonisch. Im Sonderfall $J = -1$ bilden die 4 Punkte auf der Möbiusquadrik ein Tetraeder, diese Konfiguration besitzt die höchste Symmetrie! Die Geraden $g_0 = [g_{12}, g_{34}]$, $g_1 = [g_{13}, g_{24}]$ und $g_2 = [g_{23}, g_{14}]$ bilden eine ON-Basis von $\mathcal{G}$, die Pole von g_0 trennen die von g_{12} und g_{34} harmonisch, entsprechendes gilt für g_1 und g_2 . In einer euklidischen Basis mit $g_0 = [h_\infty, h_0]$ sind $\{\infty, 0\}$, $\{-1, +1\}$ und $\{-i, +i\}$ die Pole der ON-Basis, in diesem KOS besitzen die 4 Punkte bei geeigneter Orientierung die komplexen Koordinaten: $\left\{ +f, -f, +\frac{1}{f}, -\frac{1}{f} \right\}$, $f \in \mathbb{C}$ (s. Bild oben).¹

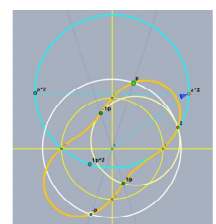
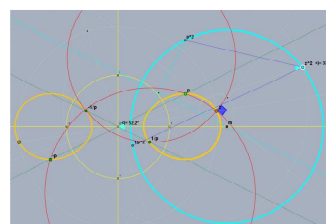
5 Hermitesche Abbildungen II: Berührorte, Cassini-Quartiken

Wo berühren sich die Kreise zweier Kreisbüschel? Allgemeiner: wo schneiden sich die Kreise zweier Büschel unter einem festen Winkel?

Die Integralkurven von zwei linearen Vektorfeldern $g_1 \cdot h = 1$ und $g_2 \cdot h = 1$ berühren sich, wenn $g_1 \wedge g_2(h, h) := \text{im} \left((g_1 \cdot h) \cdot \overline{(g_2 \cdot h)} \right) = 0$ gilt. Besitzen die beiden Infinitesimalen g_1 und g_2 vier verschiedene Pole, so kann man das KOS wie in Abschnitt 4 wählen. Man erhält als Berührort eine bizirkuläre Quartik des Typs:

$$g_1 \wedge g_2(h(z), h(z)) = \text{im} \left((g_1 \cdot h(z)) \cdot \overline{(g_2 \cdot h(z))} \right) = \alpha \cdot \left(|z^2 - m^2|^2 - \rho^2 \right) = 0, \alpha, \rho \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{C}$$

Dies ist, von speziellen Lagen abgesehen, eine *Cassini-Lemniskate* mit den Brennpunkten $\pm m$, die sich aus der Lage der Pole der Infinitesimalen g_1 und g_2 berechnen lassen. Eine solche Cassini-Quartik ist das Bild eines Kreises unter der Wurzelabbildung: je nach der Lage dieses Kreises zu $\{0, \infty\}$ ist die Cassini-Lemniskate ein- oder zweifach, wenn der Kreis durch 0 bzw. durch ∞ geht, erhält man eine Bernoulli-Lemniskate, bzw. eine gleichseitige Hyperbel.



¹Wir sprechen von der symmetrisierenden Wirkung des Lie-Produkts. Die Bezeichnung f wurde gewählt, weil die Punkte später als Brennpunkte erscheinen.

4