Der Reduktionssatz

Aus dem Unterricht kennen Sie die Methode "Nullstelle raten, dann Polynomdivision", um die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion zu berechnen.

Diese Methode funktioniert nur deshalb, weil der so genannte Reduktionssatz gilt:

> **<u>Reduktionssatz</u>**: Ist f eine ganzrationale Funktion n-ten Grades und x_1 eine Nullstelle von f, so gilt:
>
> $f(x) = g(x)\cdot(x - x_1)$ ("Linearfaktor abspalten")
>
> wobei g eine ganzrationale Funktion vom Grad n – 1 ist.

Warum gilt dieser Satz?

Dazu überlegen wir uns zunächst, dass ganz allgemein folgender Hilfssatz gilt:

<u>Hilfssatz</u>: Ist f eine ganzrationale Funktion n-ten Grades, so lässt sich f immer umschreiben in die Form:

$$f(x) = g(x)\cdot(x - a) + b$$

wobei g eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1 ist, und a eine Zahl ists, die beliebig gewählt werden kann, und b eine Zahl ist, die sich abhängig von der Wahl von a automatisch ergibt.

Dass dieser Satz tatsächlich gilt, sieht man am besten, wenn man sich nacheinander Funktionen 1., 2. und 3. Grades anschaut. Durch **geschicktes Ergänzen** versuchen wir nach und nach den Faktor (x – a) auszuklammern. (Ihre Aufgabe ist es dabei, sich jeden einzelnen Rechenschritt klar zu machen!)

Funktion 1. Grades (lineare Funktion):

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 7 && \text{wähle beliebige Zahl } a = 3 \\ &= 2(x - 3) + 3\cdot 2 - 7 \\ &= 2(x - 3) - 1 \end{aligned}$$

Das heißt: wenn man a = 3 wählt, ergibt sich g(x) = 2 (Grad 0) und b = -1.

Funktion 2. Grades (quadratische Funktion):

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 5x + 7 && \text{wähle beliebige Zahl } a = -2. \\ &= 4x(x + 2) - 4x\cdot 2 - 5x + 7 \\ &= 4x(x + 2) - 8x - 5x + 7 \\ &= 4x(x + 2) - 13x + 7 \\ &= 4x(x + 2) - 13(x + 2) + 13\cdot 2 + 7 \\ &= 4x(x + 2) - 13(x + 2) + 33 && \mid \text{aus ersten beiden Termen } (x - 2) \text{ ausklammern} \\ &= (4x - 13)(x + 2) + 33 \end{aligned}$$

Das heißt: wenn man a = -2 wählt, ergibt sich g(x) = 4x – 13 (Grad 1) und b = 33.

Funktion 3. Grades

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^3 - 2x^2 + x - 10 && \text{wähle beliebige Zahl } a = 4 \\
&= 3x^2(x-4) + 3x^2 \cdot 4 - 2x^2 + x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 12x^2 - 2x^2 + x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x^2 + x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x(x-4) + 10x \cdot 4 + x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x(x-4) + 40x + x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x(x-4) + 41x - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x(x-4) + 41(x-4) + 41 \cdot 4 - 10 \\
&= 3x^2(x-4) + 10x(x-4) + 41(x-4) + 154 && \mid\ (x-4) \text{ ausklammern} \\
&= (3x^2 + 10x + 41)(x-4) + 154
\end{aligned}$$

Das heißt: wenn man $a = 4$ wählt, ergibt sich $g(x) = 3x^2 + 10x + 41$ (Grad 2) und $b = 154$.

Es ist klar, dass diese Methode **immer** und für Funktionen jeden Grades funktioniert, sodass der Hilfsatz wirklich immer stimmt.

Aufgabe: Um zu prüfen, ob Sie die Methode verstanden haben, zeigen Sie, dass sich für die Funktion $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 2$ für $a = 2$ ergibt:

$$f(x) = (x^3 - x^2 - x + 2)(x - 2) + 2.$$

Jetzt verwenden wir den Hilfsatz, um den Reduktionssatz zu beweisen:

Beweis des Reduktionssatzes:

Wir nehmen also eine ganzrationale Funktion f n-ten Grades mit der Nullstelle x_1.

Wir wenden den Hilfssatz an: Die Zahl a dürfen wir beliebig wählen. Gut, schauen wir einmal, was passiert, wenn wir $a = x_1$ wählen: Der Hilfssatz sagt, dass dann gilt:

$$f(x) = g(x)\,(x - x_1) + b$$

Aber welchen Wert hat nun b? Um das heraus zu finden, nutzen wir aus, dass x_1 Nullstelle von f ist, dass also gilt: $f(x_1) = 0$.

Setzen wir in die Gleichung $f(x) = g(x)\,(x - x_1) + b$ für x die Nullstelle x_1 ein, so ergibt das:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= g(x_1)\,(x_1 - x_1) + b \\
0 &= g(x_1)\,(\ \ 0\ \ ) + b \\
0 &= \quad 0 \quad + \ b \\
0 &= b
\end{aligned}$$

Das heißt: wählt man für a die Nullstelle x_1, ist $b = 0$, und es bleibt:

$$f(x) = g(x)(x - x_1)$$

Das ist aber genau das, was der Reduktionssatz behauptet. Q.e.d.