# Kettenregel

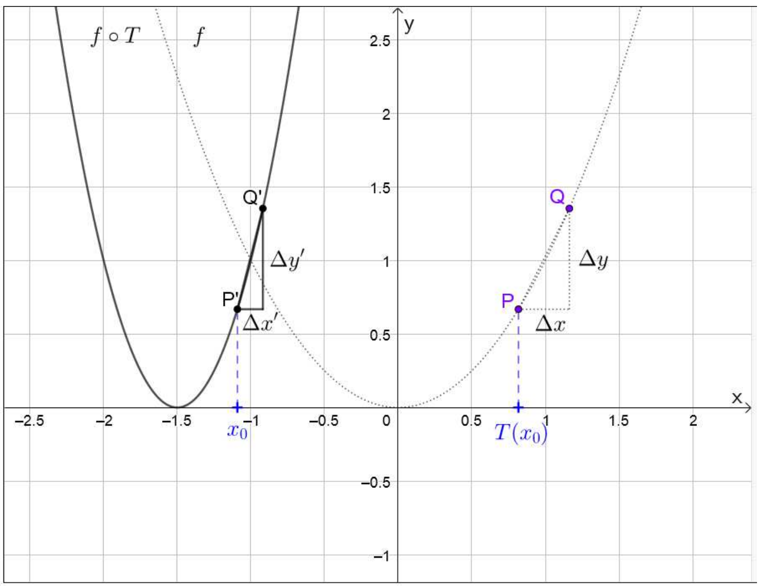
Wir suchen die Ableitung einer Verkettung $f \circ g$ von zwei Funktionen. Genauer wollen wir die Ableitung $(f \circ g)'(x_0)$ an einer Stelle $x_0$ berechnen, wenn wir wissen, dass $g$ an der Stelle $x_0$ und $f$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar ist. Das Ergebnis wird bekanntlich lauten:

$$(f \circ g)'(x_0) = \big((f' \circ g) \cdot g'\big)(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

Diese Formel irritiert regelmäßig und vor allem der Faktor $g'(x_0)$, der „*nachdifferenziert*" wird, sorgt für Verwirrung. Bevor wir uns den Allgemeinfall anschauen, wollen wir uns zunächst auf lineare Funktionen $g(x) = T(x) = ax + b$ beschränken. Durch die Komposition $f \circ T$ würde die Stelle $x_0$ erst mit dem Faktor $a$ multipliziert und zum Produktwert würde noch $b$ addiert werden. Die Wirkung auf den Graphen von $f$ ist wohlbekannt. Er würde zunächst um $-b$ bezüglich der $x$-Richtung verschoben und anschließend (*für* $a \neq 0$) mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ bezüglich der $y$-Achse gestreckt werden. Da wir für unsere Ableitungen Differenzenquotienten bzw. die Steigungen von Sekanten des Graphen betrachten, liegt es nahe, die Wirkung von $T$ auf die entsprechenden Steigungsdreiecke eingehender zu untersuchen. Genau dies kann mit dem Applet geschehen.

Mit den Schiebereglern lassen sich verschiedene lineare Funktionen $T(x) = ax + b$ einstellen und die Veränderungen am Graphen lassen sich sofort nachvollziehen. Wie schon im Vorfeld diskutiert wurde, bewirkt eine Änderung des Parameters $b$ lediglich eine Verschiebung des Graphen – und wie man im Applet sieht, auch des Steigungsdreiecks. Somit hat er keinerlei Einfluss auf die am Punkt $P'$ gemessene Steigung. Anders verhält es sich mit dem Parameter $a$. Wenn wir ihn ändern, so nimmt $\Delta x'$ zu oder ab… genauer ist $\Delta x' = x_{Q'} - x_{P'} = \left(\frac{1}{a}\big(x_Q - b\big)\right) - \left(\frac{1}{a}(x_P - b)\right) = \frac{1}{a} \cdot \big(x_Q - x_P\big) = \frac{1}{a} \cdot \Delta x$ für $a \neq 0$. Somit aber ist die Steigung in $P'$ gleich $\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{y_{Q'} - y_{P'}}{\frac{1}{a} \cdot \Delta x} = a \cdot \frac{y_Q - y_P}{\Delta x} = a \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Für eine Verschmälerung von $\Delta x'$ (*ein wachsendes* $a$) nimmt die Steigung in $P'$ zu – und umgekehrt. Genauer ist sie gleich dem Produkt von $a$ und der Steigung am ursprünglichen Punkt $P$. Dies liefert uns auch sogleich die Interpretation eines ersten Teils der obigen Formel. Der „nachdifferenzierte" Faktor $g'(x_0) = T'(x_0) = a$ berücksichtigt die Änderung der Tangentensteigungen durch die mit $T$ einhergehende Streckung des Graphen von $f$.

Es bleibt jetzt nur noch zu klären, an welcher Stelle die Ableitung $f'$ ausgewertet werden muss. Im nachstehenden Bild sieht man die Urbilder $P$ und $Q$ auf dem Graphen von $f$ und auf welche Punkte $P'$ und $Q'$ sie durch die Komposition von $f$ mit $T$ in Folge der Verschiebung und Streckung des Graphen abgebildet werden. Der Fokus liegt im Applet daher auch weniger auf einer *vorgegebenen* Stelle $x_0$, sondern darauf, wie man $x_0$ *wählen* muss, damit $T(x_0) = x_P$ ist. Damit ist die gesuchte Stelle aber auch schon identifiziert; es muss $f'(x_P) = f'\big(T(x_0)\big)$ als die ursprüngliche Tangentensteigung berechnet werden.




Die Kettenregel könnte sodann wie folgt formuliert werden:

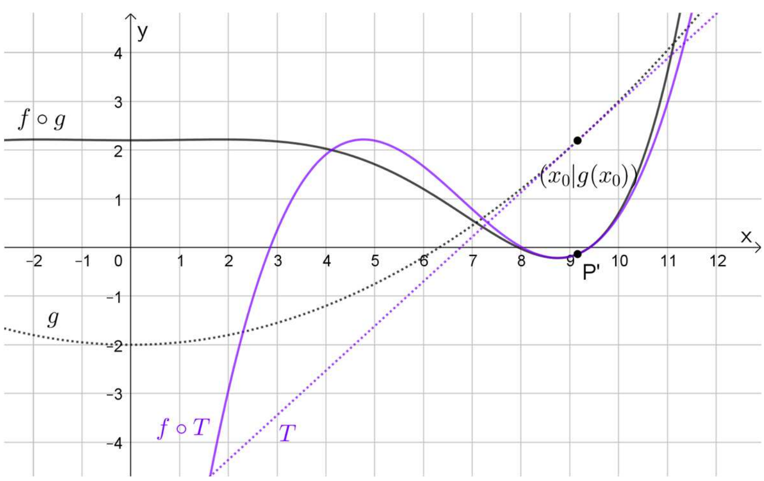
> *„Ich möchte die Ableitung von $f \circ T$ an der neuen Stelle $x_0$ wissen, also schaue ich, welche Steigung die Funktion $f$ an der ursprünglichen Stelle $T(x_0)$ hatte und berücksichtige die Streckung des Graphen von $f$ mit dem Faktor $T'(x_0)$.“*

Insgesamt erhalten wir für die Steigung der Tangente in $P'$ an den Graphen von $f \circ T$ den Ausdruck:

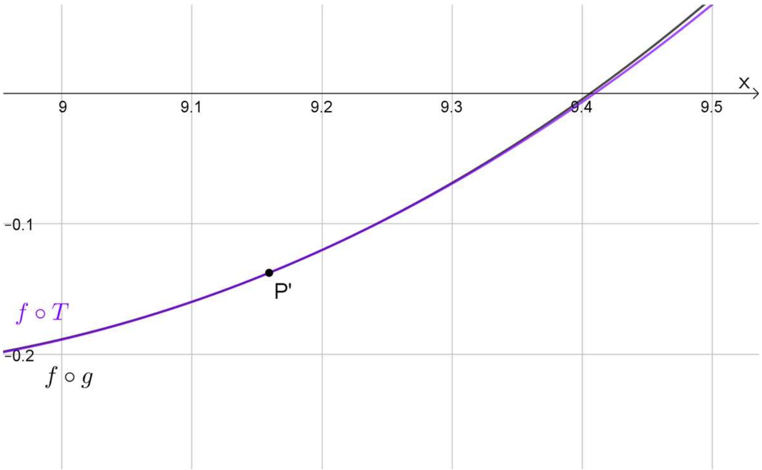
$$\boxed{f'\big(T(x_0)\big) \cdot T'(x_0)}$$

Dies ist zugleich die rechte Seite der Kettenregel für $g = T$.

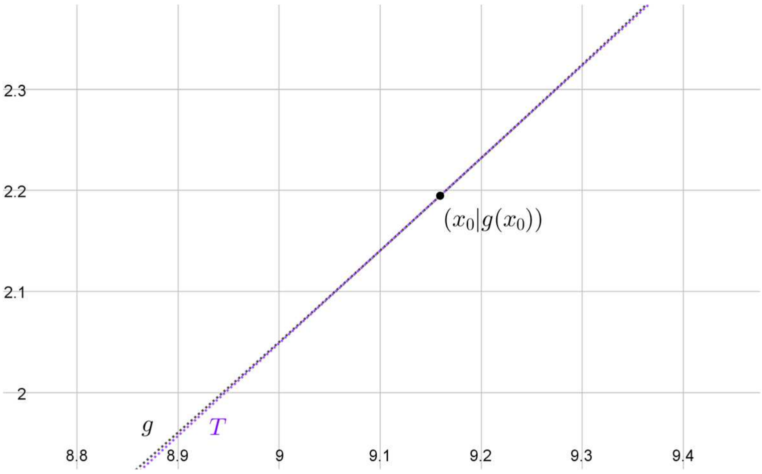
Für die Plausibilisierung der Kettenregel mit einer allgemeinen (*inneren*) Funktion $g$ betrachten wir die Funktion $f \circ g$ in unmittelbarer Nähe des Punktes $P'$. Indem wir nur nahe genug an den Punkt $P'$ heranzoomen, werden die Graphen von $f \circ g$ und $f \circ T$ mit $T(x) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + g(x_0)$ nahezu ununterscheidbar. Nachfolgend sind die vier wesentlichen Spieler für $f(x) = 0{,}1x^3 - x + 1$ und $g(x) = 0{,}05x^2 - 2$ gezeigt.



Wenn wir nur genügend nah an $P'$ heranzoomen, so sehen wir die versprochene Verschmelzung von $f \circ g$ und $f \circ T$.




Dabei ist es unerheblich, ob die Graphen noch eine Krümmung zeigen oder schon annähernd linear sind. Entscheidend ist lediglich, dass der Verlauf des Graphen von $f \circ g$ in genügender Nähe von $P'$ durch den Graphen von $f \circ T$ korrekt wiedergegeben wird. Es sollte ferner kein Zweifel daran bestehen, dass die Tangenten in $P'$ an die Graphen von $f \circ g$ und $f \circ T$ übereinstimmen. Der Vollständigkeit halber zoomen wir auch noch einmal an den Punkt $\left(x_0 \middle| g(x_0)\right)$ heran und betrachten die Graphen von $g$ und $T$ in seiner Nähe genauer.




Die vorzügliche Approximation von $g$ durch $T$ für genügend kleine Abweichungen von $x_0$ ist natürlich der tiefere Grund dafür, dass die Graphen von $f \circ g$ und $f \circ T$ so gut übereinstimmen. Ohne dass wir damit einen Beweis ersetzen könnten, berechnen wir nun die Tangentensteigung in $P'$ an den Graphen von $f \circ g$, indem wir sie gleich der Tangentensteigung in $P'$ an den Graphen von $f \circ T$ setzen, und erhalten so

$$(f \circ g)'(x_0) = (f \circ T)'(x_0) = f'\big(T(x_0)\big) \cdot T'(x_0)$$

mit $T(x) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + g(x_0)$, also $T(x_0) = g(x_0)$ und $T'(x) = g'(x_0)$, mithin $T'(x_0) = g'(x_0)$. Nach Einsetzen in die voranstehende Gleichung liefert dies:

$$\boxed{f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)}$$

Im Allgemeinfall erfährt der Graph von $f$ also eine von der Stelle $x_0$ abhängige Streckung, die mit dem Faktor $g'(x_0)$ berücksichtigt wird, und die noch benötigte ursprüngliche Steigung des Graphen von $f$ finden wir an der Stelle $g(x_0)$. Die gesuchte Steigung des Graphen von $f \circ g$ an der Stelle $x_0$ ist dann gleich ihrem Produkt.